

ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR

uc3m | Universidad **Carlos III** de Madrid

DEPARTAMENTO DE MECÁNICA DE MEDIOS CONTINUOS Y
TEORÍA DE ESTRUCTURAS

GRADO EN INGENIERÍA MECÁNICA
2017-2018

“Cavitación dinámica en sólidos hiperelásticos: un análisis numérico”

Trabajo Fin de Grado

Autor:

Carlos Domínguez Monferrer

Tutor:

Dr. D. José Antonio Rodríguez-Martínez

Leganés, 2018

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, agradecer a Dr. D. José Antonio Rodríguez-Martínez por brindarme la oportunidad de realizar este trabajo de investigación así como al Departamento de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras de la Universidad Carlos III de Madrid por permitirme realizarlo.

A mi familia por acompañarme en estos 4 años, tanto en los momentos duros como en las alegrías y, en especial, a mi abuelo Jaime, quien ha sido un referente para mí en todos los aspectos.

En definitiva, a todas las personas que me han ayudado a lo largo de esta etapa.

RESUMEN

En el presente documento se realiza un estudio del fenómeno de cavitación dinámica en un elemento esférico de caucho tipo poro mediante el software de elementos finitos Abaqus/Explicit, con el objetivo de analizar la influencia de los diferentes modelos constitutivos hiperelásticos en el fallo del material. Dichos modelos se caracterizan por ser no lineales y resultar idóneos para casos donde las deformaciones son finitas.

También se realiza un análisis paramétrico del coeficiente de Poisson para estudiar los efectos de la compresibilidad en los modelos constitutivos en el proceso de expansión hasta alcanzar la cavitación. En este caso, a diferencia del primero, se caracteriza un material compresible, es decir, su densidad varía a lo largo del tiempo.

Palabras clave: hiperelasticidad, cavitación dinámica, material tipo caucho, coeficiente de Poisson

ABSTRACT

In the present document, a study of the dynamic cavitation phenomenon in a spherical pore of rubber is carried out using Abaqus / Explicit finite element software, to analyze the influence of the different hyperelastic constitutive models in the failure of the material. These models are characterized by being non-linear and suitable for cases where deformations are finite.

A parametric analysis of the Poisson's coefficient is also performed to study the effects of compressibility in the constitutive models on the expansion process until reach the cavitation. In this case, a compressible material is characterized.

Keywords: hyperelasticity, dynamic cavitation, rubber-like materials, Poisson coefficient.

ÍNDICE DE CONTENIDO

CAPÍTULO 1: INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS	1
1.1 Introducción	1
1.2 Objetivos	3
1.3 Estructura del documento	3
CAPÍTULO 2: MECÁNICA DEL SÓLIDO HIPERELÁSTICO	4
2.1 Cinemática del sólido deformable	4
2.2 Hiperelasticidad	9
2.2.1 Modelos hiperelásticos	11
2.2.1.1 Función Mooney-Rivlin	11
2.2.1.2 Función Neo-Hookeano	12
2.2.1.3 Función Ogden	12
CAPÍTULO 3: FENÓMENO DE CAVITACIÓN	14
3.1 Cavitación en elastómeros	14
CAPÍTULO 4: MODELO NUMÉRICO	16
4.1 Descripción del problema	16
4.2 Modelo de elementos finitos	18
4.2.1 Geometría	18
4.2.2 Caracterización del material	19
4.2.3 Carga y condiciones de contorno	20
4.2.4 Malla	20
CAPÍTULO 5: RESULTADOS	26
5.1 Influencia del modelo constitutivo en la cavitación	26
5.2 Efecto de la compresibilidad en el modelo constitutivo	36
CAPÍTULO 6: MARCO REGULADOR Y ENTORNO SOCIO-ECONÓMICO DEL ESTUDIO	41

6.1 Normativa aplicable	41
6.2 Propiedad intelectual.....	41
6.3 Impacto socio-económico	42
6.4 Presupuesto estimado.....	42
CAPÍTULO 7: CONCLUSIONES.....	44
7.1 Influencia del modelo constitutivo en la cavitación	44
7.2 Efecto de la compresibilidad en el modelo constitutivo	45
CAPÍTULO 8: TRABAJOS FUTUROS	46
BIBLIOGRAFÍA	47

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Coordenadas materiales y espaciales de una partícula (9).....	4
Figura 2. Campo de desplazamientos de una partícula (9).....	5
Figura 3. Relación tensodeformacional en materiales hiperelásticos. (a) caucho. (b) tejidos biológicos blandos	9
Figura 4. Estructura molecular del caucho natural (11)	9
Figura 5. Elemento esférico tipo poro con una cavidad donde se aplica la carga	16
Figura 6. Simetría a 1/4 del elemento esférico	17
Figura 7. Geometría del modelo con unidades en mm	18
Figura 8. Evolución de la velocidad de expansión para distintas mallas	22
Figura 9. Zoom realizado en la curva Velocidad de expansión - Tiempo donde se observan mayores diferencias entre las mallas.....	23
Figura 10. Malla final del modelo con detalles en la zona de la cavidad.....	25
Figura 11. Comparación de los modelos para una presión de 0,5 MPa	27
Figura 12. Comparación de los modelos para una presión de 1 MPa	28
Figura 13. Comparación de los modelos para una presión de 5 MPa	30
Figura 14. Comparación de los modelos para una presión de 8 MPa	31
Figura 15. Comparación de los modelos para una presión de 10 MPa	32
Figura 16. Presión aplicada en la cavidad frente velocidad de cavitación para distintos modelos hiperelásticos.....	33
Figura 17. Evolución de la cavidad para un tiempo de 3 μ s para distintos valores de presión. Unidades en Pa	35
Figura 18. Curva Relación de densidades - Distancia en la dirección radial para los 3 modelos hiperelásticos, considerando un coeficiente de Poisson de 0,12.....	37
Figura 19. Curva Relación de densidades - Distancia en la dirección radial, para los 3 modelos hiperelásticos, considerando un coeficiente de Poisson de 0,3.....	38

Figura 20. Curva Relación de densidades - Distancia en la dirección radial, para los 3 modelos hiperelásticos, considerando un coeficiente de Poisson de 0,45 39

Figura 21. Curva Relación de densidades - Distancia en la dirección radial, para la forma Neo-Hookeano, considerando distintos coeficientes de Poisson 40

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Coeficiente de Poisson en función de la relación Módulo de compresibilidad-Módulo de cortadura.....	8
Tabla 2. Propiedades mecánicas del Estireno-Butadieno (11)	17
Tabla 3. Valores del coeficiente de Poisson en función del módulo de compresibilidad. cortadura y el parámetro D_1	20
Tabla 4. Elementos de las distintas configuraciones de malla.....	21
Tabla 5. Valores de velocidad de cavitación para distintos valores de presión.....	34
Tabla 6. Coste aproximado del estudio	43

CAPÍTULO 1: INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS

1.1 Introducción

El fenómeno de cavitación es un modo de fallo típico de elastómeros, polímeros, tejidos biológicos blandos y metales dúctiles. Dicha inestabilidad ocurre cuando se somete a un sólido a una presión que supera un cierto valor crítico. Esto produce que la expansión del material aumente de forma drástica, provocando un colapso en el mismo.

Por otro lado, si la presión ejercida en la cavidad se sitúa por debajo del valor crítico, se produce una expansión controlada, alcanzándose una nueva configuración de equilibrio.

Se han realizado numerosos estudios, tanto analíticos como numéricos, en diversos tipos de materiales y configuraciones y en la actualidad se ha incrementado su importancia por su gran utilidad en el campo de los materiales biológicos. En particular, cabe destacar los artículos de Horgan y Polignone (1) y Fond (2) sobre la cavitación en sólidos elásticos con comportamiento no lineal, López-Pamies, Nakamura e Idiart (3) donde se introduce una nueva teoría sobre la cavitación en elastómeros, incorporando información directa del lugar donde se podría dar el fallo y Faye, Rodríguez-Martínez y Volokh (4) donde se analiza el impacto de la viscosidad y la inercia en el proceso de expansión de la cavidad de un elemento esférico de caucho.

A pesar de que la mayoría de estudios de la cavitación dinámica están limitados a velocidades de expansión moderadas, se ha descubierto recientemente que a velocidades altas aparecen ondas de choque (5). Estas se presentan debido a la gran deformación que se produce en el seno del material cuando se aplica una presión de forma instantánea, siendo su análisis fundamental ya que generan un gran cambio en el comportamiento del sólido, disminuyendo de forma considerable su resistencia.

En el campo de la medicina también se han realizado numerosos estudios sobre este fenómeno, todos ellos enfocados al aneurisma (ensanchamiento anormal de las paredes de una arteria), como el aneurisma sacular intracraneal, estudiado en *Further evidence for the dynamic stability of intracranial saccular aneurysms* de G. David y J. D. Humphrey (6) o a nivel general en *Initiation of aneurysms as a mechanical bifurcation phenomenon* de Y. B. Fu, G. A. Rogerson y Y. T. Zhang (7). En este caso, el problema adquiere una mayor complejidad debido a la modelización del flujo sanguíneo así como los tejidos que componen la estructura de las arterias.

Para analizar este fenómeno se utilizan modelos hiperelásticos que se basan en el potencial de energía de deformación, que se define como la energía elástica almacenada por unidad de volumen. Existen numerosas formas de calcular dicho parámetro en Abaqus / Explicit, pero todas ellas consideran incompresibilidad e isotropía en el elastómero. Cada uno de los modelos hiperelásticos se puede separar en una componente desviadora y otra volumétrica pero se diferencian en que son distintas funciones, es decir, unas siguen una tendencia exponencial mientras que otras son polinómicas.

Cada una de las variables presentes en las diferentes formas se obtiene a partir de ensayos experimentales uniaxiales, equibiaxiales, planares y volumétricos pero dado que el objetivo de este trabajo no es el de obtener dichos parámetros sino analizar la influencia de cada uno de los modelos en la cavitación, se han considerado los valores obtenidos por A. Bucchi y E. H. Hearn en *Predictions of aneurysm formation in distensible tubes* (8).

Por todo ello, en el presente documento se realiza un estudio de la cavitación dinámica en un elemento esférico de caucho tipo poro con el objetivo de analizar la influencia de los diferentes modelos constitutivos hiperelásticos en el fallo del material. Estos se caracterizan por ser no lineales y resultar idóneos para casos donde las deformaciones son finitas.

También se realiza un análisis paramétrico del coeficiente de Poisson con el fin de estudiar los efectos de la compresibilidad en los modelos hiperelásticos en el proceso de expansión hasta alcanzar la cavitación. En este caso, a diferencia del primer análisis, se caracteriza un material compresible, es decir, su densidad varía a lo largo del tiempo.

Para ello se utiliza el código comercial de elementos finitos Abaqus/Explicit, en el que se modeliza el elemento esférico con las respectivas condiciones de contorno. No obstante, no se consideran los efectos térmicos para focalizar el problema desde un punto de vista puramente mecánico.

1.2 Objetivos

Los objetivos de este trabajo son los siguientes:

- ❖ Estudiar el fenómeno de cavitación dinámica en sólidos hiperelásticos cuando son sometidos a una presión determinada mediante la expansión esférica de un poro de caucho.
- ❖ Analizar la influencia de los modelos constitutivos para describir el comportamiento del material en la presión de cavitación, para unas condiciones de contorno determinadas.
- ❖ Investigar el comportamiento del material para un proceso de expansión no isócoro.

1.3 Estructura del documento

Esta memoria consta de 8 capítulos, los cuales se pueden agrupar en 4 bloques:

- ❖ **Bloque 1:** se explican los conceptos fundamentales de la mecánica del sólido hiperelástico, incluyendo una introducción a la cinemática del sólido deformable, el concepto de material hiperelástico, los diferentes modelos constitutivos y el fenómeno de cavitación en elastómeros. En este bloque se encuentran los capítulos 2 y 3.
- ❖ **Bloque 2:** correspondiente a los capítulos 4 y 5, se desarrolla el modelo numérico realizado para el estudio, incluyendo el planteamiento del problema, geometría, caracterización del material, condiciones de contorno y el mallado del modelo final, y se analizan los resultados obtenidos.
- ❖ **Bloque 3:** este bloque lo conforma el capítulo 6, referido al marco regulador y el entorno socio-económico del estudio, donde se explica la normativa aplicable, el concepto de propiedad intelectual y el impacto socio-económico. Además, se desarrolla el presupuesto del estudio de forma aproximada.
- ❖ **Bloque 4:** este último bloque está constituido por los capítulos 7 y 8, correspondiente a las conclusiones y los trabajos futuros.

CAPÍTULO 2: MECÁNICA DEL SÓLIDO HIPERELÁSTICO

En este capítulo se realiza una introducción a la cinemática del sólido deformable, diferenciando las ecuaciones del movimiento desde una descripción material y espacial, planteando el concepto de tensor gradiente de deformación y esclareciendo su aplicación en este estudio.

También se desarrolla el concepto de material hiperelástico, explicando los diferentes modelos constitutivos y las diferencias entre ellos.

2.1 Cinemática del sólido deformable

Considerando un sólido continuo en un espacio Euclídeo en \mathbb{R}^3 para un tiempo t con una configuración de referencia Ω_0 , las ecuaciones del movimiento del mismo se pueden plantear mediante una descripción material \vec{X} , es decir, se fija un punto del sólido (X_1, X_2, X_3) y se estudia cómo cambian sus variables (temperatura, estado tensional, etc) para un tiempo t o mediante una descripción espacial \vec{x} , en la que se fija un punto del espacio (x_1, x_2, x_3) y se estudian las variables de los distintas partículas que pasan por él para un determinado tiempo t (ver Figura 1).

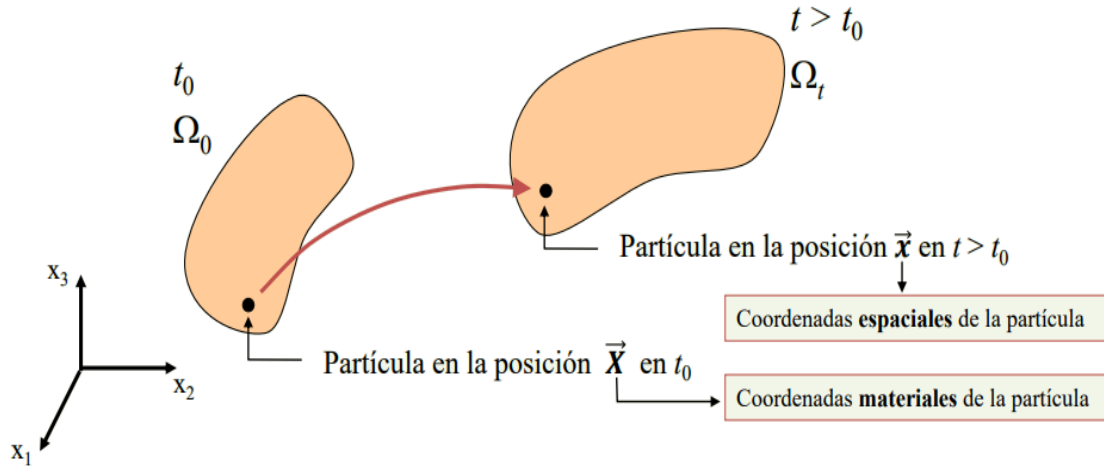


Figura 1. Coordenadas materiales y espaciales de una partícula (9)

Usando las ecuaciones del movimiento inversas, $\vec{X} = \varphi^{-1}(\vec{x}, t)$, donde φ es una función biyectiva y diferencial, $x = \varphi(\vec{X}, t)$, que contiene toda la información relativa al desplazamiento y la velocidad, se pueden relacionar ambas descripciones, obteniendo las siguientes expresiones (9):

Desplazamiento (ver Figura 2):

$$\vec{u} = \vec{x} - \vec{X} = \vec{u}(\vec{X}, t) = \vec{u}(\varphi^{-1}(\vec{x}, t), t) \equiv \hat{u}(\vec{x}, t) \quad (2.1)$$

Velocidad:

$$\vec{v} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \frac{\partial \varphi(\vec{X}, t)}{\partial t} \vec{v}(\vec{X}, t) = \vec{v}(\varphi^{-1}(\vec{x}, t), t) \equiv \hat{v}(\vec{x}, t) \quad (2.2)$$

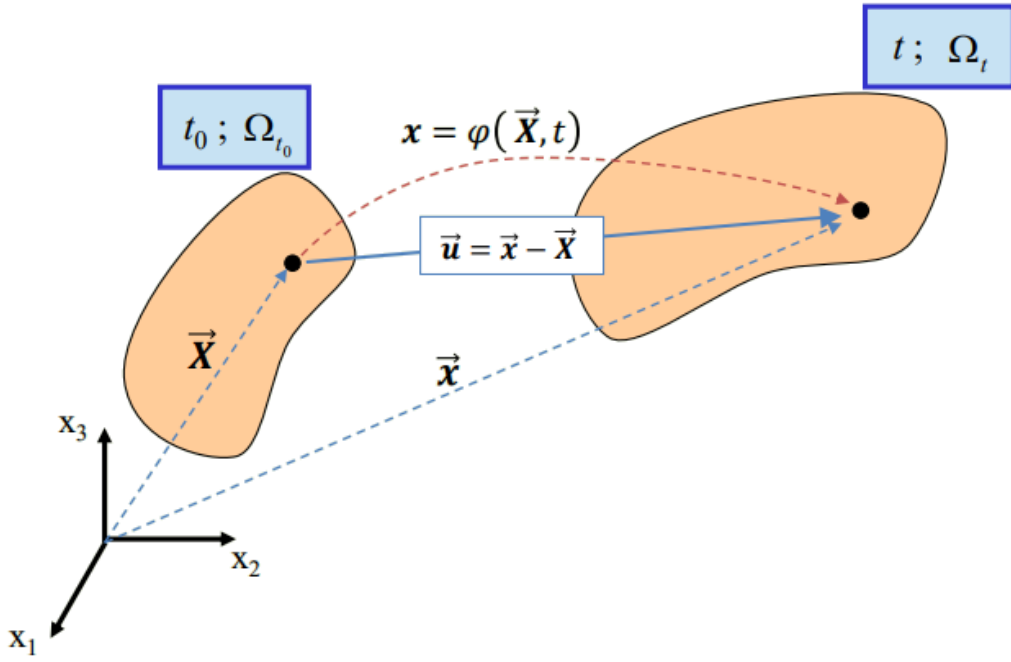


Figura 2. Campo de desplazamientos de una partícula (9)

Planteadas las ecuaciones del movimiento se puede formular el gradiente del campo de desplazamientos del sólido mediante una descripción material. Se trata de un tensor de 2º orden no simétrico de 9 componentes de la forma:

$$(\nabla \vec{u})_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \quad (2.3)$$

Que expresado en forma matricial es:

$$\nabla \vec{u} \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial X_1} & \frac{\partial u_3}{\partial X_2} & \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Esto permite plantear el problema cinemático mediante un tensor de 2º orden denominado tensor gradiente de deformación F , que contiene la información del movimiento relativo, a lo largo del tiempo, de todas las partículas materiales en un entorno diferencial dado, mediante la matriz jacobiana J_φ , de la transformación $\vec{x} = \varphi(\vec{X}, t)$:

$$J_\varphi = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} \equiv F \quad (2.5)$$

En forma de componentes se puede expresar como:

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \quad (2.6)$$

donde

❖ δ_{ij} es la matriz identidad:

$$\delta_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El tensor gradiente de deformación permite cuantificar el cambio de magnitud (elongación) y el cambio de dirección (rotación) mediante la relación $d\vec{x} = F \cdot d\vec{X}$ así como la variación de volumen temporal mediante la expresión $dV_t = \det(F) \cdot dV_0$.

Esta última utilidad del tensor es la que permite conocer si el sólido presenta una baja o alta compresibilidad.

Si $\det(F) < 0$, la deformación y el movimiento asociado a φ produciría volúmenes negativos en la configuración deformada y como este fenómeno no es físicamente posible,

es condición indispensable que el $\det(F) > 0$ ya que, además, si $\det(F) = 0$, no podrían obtenerse las ecuaciones del movimiento inversas.

Por tanto, se tiene:

- ❖ Si $0 < \det(F) < 1$, el volumen disminuye \rightarrow Sólido compresible.
- ❖ Si $\det(F) = 1$, el volumen permanece constante \rightarrow Sólido incompresible.
- ❖ Si $\det(F) > 1$, el volumen aumenta \rightarrow Sólido compresible.

En el caso de los materiales hiperelásticos, presentan una baja compresibilidad en comparación con su flexibilidad por lo que resulta satisfactorio modelizarlos como incompresibles o con una compresibilidad muy baja, es decir, $\det(F) \approx 1$.

No obstante, existe otro método para caracterizar la compresibilidad de un material estableciendo una relación entre el módulo de compresibilidad K , que expresa la resistencia del sólido a la deformación volumétrica mediante la siguiente ecuación (10):

$$K = V \frac{\partial P}{\partial V} \quad (2.7)$$

donde

- ❖ V es el volumen inicial del cuerpo.
- ❖ ∂V es el cambio de volumen que experimenta el cuerpo.
- ❖ ∂P es el cambio de la presión aplicada al cuerpo.

Y el módulo de cortadura μ , que expresa la resistencia al cizallamiento del material.

Dicha relación se puede escribir en términos del coeficiente de Poisson ν , que establece la relación entre la deformación según la dirección ortogonal a la aplicación de la carga y la deformación según la dirección de aplicación de la carga, obteniendo la siguiente expresión (10):

$$\nu = \frac{\frac{3 \cdot K_0}{\mu_0} - 2}{\frac{6 \cdot K_0}{\mu_0} + 2} \quad (2.8)$$

donde

- ❖ K_0 es el módulo de compresibilidad inicial.
- ❖ μ_0 es el módulo de cortadura inicial.

Una relación elevada de $\frac{K_0}{\mu_0}$ implica un coeficiente de Poisson próximo a 0,5 lo que supone que el material se puede considerar incompresible.

En la Tabla 1 se muestran diferentes valores del coeficiente de Poisson para diferentes ratios de $\frac{K_0}{\mu_0}$.

$\frac{K_0}{\mu_0}$	Coeficiente de Poisson
0,916	0,100
3	0,350
10	0,452
20	0,475
50	0,490

Tabla 1. Coeficiente de Poisson en función de la relación Módulo de compresibilidad-Módulo de cortadura

Esta metodología de análisis permite variar el coeficiente de Poisson del material en el software de elementos finitos Abaqus/Explicit y así estudiar el efecto de la compresibilidad en los modelos hiperelásticos.

2.2 Hiperelasticidad

La hiperelasticidad es una propiedad de los elastómeros y se caracteriza porque la relación entre tensión y deformación es no lineal, como se observa en la Figura 3.

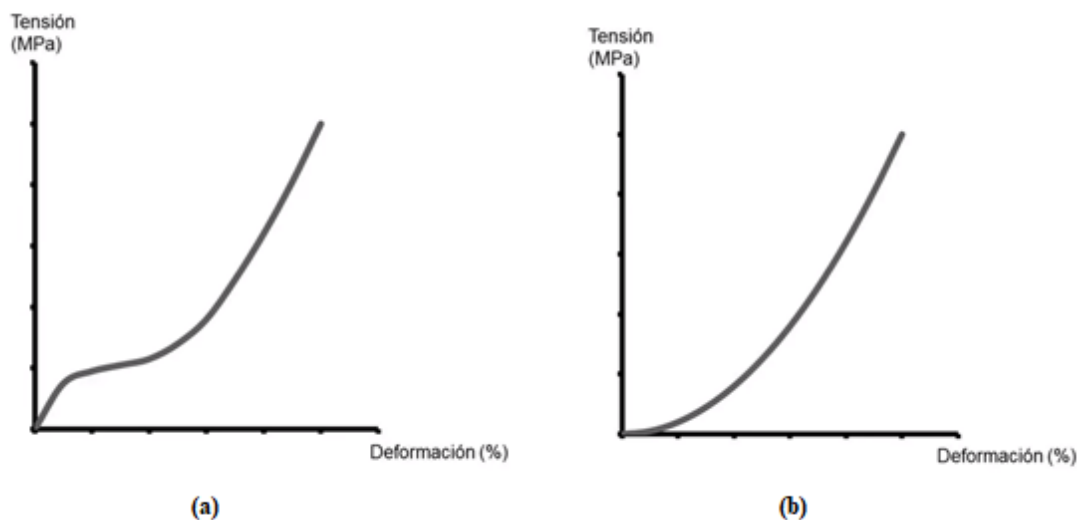


Figura 3. Relación tensodeformacional en materiales hiperelásticos. (a) caucho. (b) tejidos biológicos blandos

Es inherente de compuestos como el caucho debido a su estructura poco entrecruzada, insoluble e infusible (ver Figura 4) y también se encuentra en tejidos biológicos como las arterias elásticas que transportan la sangre desde el corazón hacia los circuitos sistémico y pulmonar (aorta, carótida, etc).

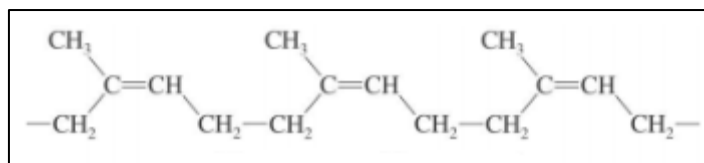


Figura 4. Estructura molecular del caucho natural (11)

Considerando un sólido libre en una configuración de referencia, al aplicarle una carga, por el principio de conservación de la energía, el trabajo de las fuerzas exteriores debe transformarse en energía durante el proceso de deformación. Aunque dicha energía puede disiparse en forma de calor o través de fisuras que se puedan generar en el sólido, otro porcentaje de ella queda acumulada en el material en forma de energía de deformación U . Cuando la totalidad del trabajo de las fuerzas exteriores se transforma en energía de deformación, el material se puede calificar de conservativo, es decir, es capaz de devolver

la totalidad de la energía que ha almacenado (12). Esto es característico de los materiales hiperelásticos.

Por ende, un material se considera hiperelástico o elástico de Green cuando existe una cierta función W dependiente de las componentes del tensor de deformaciones para la que se cumple (12):

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (2.9)$$

donde

- ❖ W es la función densidad de energía de deformación que se define como el área bajo la curva tensión-deformación:

$$W(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon dW = \int_0^\varepsilon \sigma: d\varepsilon \quad (2.10)$$

Que expresada en notación convencional es:

$$\begin{aligned} W(\varepsilon) = & \int_0^{\varepsilon_x} \sigma_x d\varepsilon_x + \int_0^{\varepsilon_y} \sigma_y d\varepsilon_y + \int_0^{\varepsilon_z} \sigma_z d\varepsilon_z + 2 \int_0^{\varepsilon_{xy}} \tau_{xy} d\varepsilon_{xy} \\ & + 2 \int_0^{\varepsilon_{xz}} \tau_{xz} d\varepsilon_{xz} + 2 \int_0^{\varepsilon_{yz}} \tau_{yz} d\varepsilon_{yz} \end{aligned} \quad (2.11)$$

siendo

- $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ las tensiones normales del tensor de tensiones.
- $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ las tensiones tangenciales del tensor de tensiones.
- ❖ ε_{ij} es el tensor de deformaciones:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

Por tanto, debe existir una función dependiente de las variables cinemáticas (deformaciones), cuya derivada respecto a estas proporcione las variables estáticas (tensiones).

Existen diversos modelos constitutivos hiperelásticos para caracterizar el comportamiento de este tipo de materiales y todos ellos utilizan como base el potencial de energía de deformación U que se define como la energía elástica almacenada por unidad de volumen:

$$U = \iiint W(\varepsilon) dV \quad (2.12)$$

Las diferentes formas de expresar el potencial de energía de deformación consideran incompresibilidad e isotropía en el material y se obtienen mediante ensayos de tracción uniaxiales, biaxiales, planares y volumétricos.

2.2.1 Modelos hiperelásticos

Existen numerosas configuraciones para expresar el potencial de energía de deformación en Abaqus/Explicit: Arruda-Boyce, Marlow, Mooney-Rivlin, Neo-Hookean, Ogden, Polinómica, Polinómica reducida, Yeoh y Van der Waals. Algunas de ellas se obtienen a partir de otras como el caso de la forma Polinómica reducida y Mooney-Rivlin, las cuales son un caso particular del modelo polinómico o Yeoh y Neo-Hookean, que se obtienen a partir de la forma Polinómica reducida.

En este caso se realiza el análisis con las formas Mooney-Rivlin, Neo-Hookean y Ogden N=1 por ser las más empleadas, esclareciendo las diferencias presentes entre los 3 modelos.

2.2.1.1 Función Mooney-Rivlin

La forma Mooney-Rivlin del potencial de energía de deformación es un modelo basado en los invariantes de deformación, y tiene como expresión (10):

$$U = C_{10}(\bar{I}_1 - 3) + C_{01}(\bar{I}_2 - 3) + \frac{1}{D_1} (J_{ela} - 1)^2 \quad (2.13)$$

donde

- ❖ C_{10} , C_{01} y D_1 son parámetros del material que dependen de la temperatura.
- ❖ \bar{I}_1 y \bar{I}_2 son el primer y segundo invariante respectivamente del tensor de deformaciones desviador definidos como:

$$\bar{I}_1 = \bar{\lambda}_1^2 + \bar{\lambda}_2^2 + \bar{\lambda}_3^2 \quad \bar{I}_2 = \bar{\lambda}_1^{(-2)} + \bar{\lambda}_2^{(-2)} + \bar{\lambda}_3^{(-2)}$$

siendo $\bar{\lambda}_i$ los alargamientos del tensor de deformaciones desviador, definidos como $\bar{\lambda}_i = J^{-\frac{1}{3}} \cdot \lambda_i$ donde J es el ratio de volumen total y λ_i los alargamientos principales.

- ❖ J_{ela} es la relación de volumen elástico que depende de la temperatura.

2.2.1.2 Función Neo-Hookeano

La forma Neo-Hookeano del potencial de energía de deformación se obtiene a partir del modelo polinómico reducido o utilizando únicamente el primer y último término de la ecuación Mooney-Rivlin. Por tanto, su expresión es (10):

$$U = C_{10}(\bar{I}_1 - 3) + \frac{1}{D_1}(J_{ela} - 1)^2 \quad (2.14)$$

donde

- ❖ C_{10} y D_1 son parámetros del material que dependen de la temperatura.
- ❖ \bar{I}_1 es el primer invariante del tensor de deformaciones desviador y se define como:

$$\bar{I}_1 = \bar{\lambda}_1^2 + \bar{\lambda}_2^2 + \bar{\lambda}_3^2$$

siendo $\bar{\lambda}_i$ los alargamientos del tensor de deformaciones desviador, definidos como $\bar{\lambda}_i = J^{-\frac{1}{3}} \cdot \lambda_i$ donde J es el ratio de volumen total y λ_i los alargamientos principales, relación entre la longitud del elemento deformado y la longitud inicial para cada una de las direcciones principales.

- ❖ J_{ela} es la relación de volumen elástico que depende de la temperatura.

2.2.1.3 Función Ogden

La forma Ogden del potencial de energía de deformación se basa en las deformaciones principales y viene definido por la expresión (10):

$$U = \sum_{i=1}^N \frac{2\mu_i}{\alpha_i^2} (\bar{\lambda}_1^{\alpha_i} + \bar{\lambda}_2^{\alpha_i} + \bar{\lambda}_3^{\alpha_i} - 3) + \sum_{i=1}^N \frac{1}{D_i} (J_{ela} - 1)^{2i} \quad (2.15)$$

donde

- ❖ μ_i , α_i y D_i son parámetros del material que dependen de la temperatura.
- ❖ λ_i son las deformaciones desviadoras principales.
- ❖ J_{ela} es la relación de volumen elástico que depende de la temperatura.

Como se observa, todos los modelos hiperelásticos presentan una componente desviadora dependiente de los invariantes del tensor desviador y una componente volumétrica que depende de la relación de volumen elástico.

Según investigaciones realizadas por B.C. Duncan en *Test methods for determining hyperelastic properties of flexible adhesives* (13), L. E. Crocker, B.C. Duncan, J.

Urquhart y A. Olsanya en *The application of rubber material models to analyse flexible adhesive joints* (14) y P. Uthuppan en *Hyperelastic Material Testing* (15), el modelo de Ogden requiere mayor tiempo de cálculo al tratarse de una función exponencial respecto a los modelos Mooney-Rivlin y Neo-Hookeano, que son funciones polinómicas. Además, conforme se aumenta la dureza del caucho a ensayar, el modelo Mooney-Rivlin se ajusta mejor al resultado experimental.

CAPÍTULO 3: FENÓMENO DE CAVITACIÓN

En este capítulo se explica el fenómeno de cavitación en elastómeros así como algunas de las investigaciones que se han realizado sobre este problema. Además, se desarrolla el concepto de onda de choque descubierto recientemente y su relación con la cavitación.

3.1 Cavitación en elastómeros

El fenómeno de cavitación en este tipo de materiales es un estado crítico en la respuesta del material cuando se aplica una carga constante de forma instantánea, produciéndose una expansión descontrolada en el seno del sólido (16).

Considerando un elemento esférico con una pequeña cavidad en el centro, si se aplica una carga en la pared de dicha cavidad, el límite en el que se produce la cavitación sirve como medida de la resistencia que ofrece el material. Ello resulta de gran utilidad pues permite caracterizar el comportamiento del mismo.

En *Fracture mechanics and cavitation in rubber-like solids* realizado por A. N. Gent y C. Wang en el Instituto de Ingeniería de Polímeros de la Universidad de Akron (17), se plantea el problema a partir de una ecuación que relaciona la expansión del radio de la cavidad, λ con la presión aplicada, P y el Módulo de Young, E :

$$\frac{P}{E} = \frac{(5 - 4\lambda^{-1} - \lambda^{-4})}{6} \quad (3.1)$$

Esta expresión predice que para un valor de presión crítica $P_c = \frac{5E}{6}$, la cavidad del sólido se expande de forma descontrolada. En el caso en el que la carga aplicada sea constante, al alcanzar un cierto valor límite, la velocidad de expansión se estabiliza en un valor finito mientras que la aceleración que sufre el material toma un valor nulo.

En *Spherical void expansion in rubber-like materials: The stabilizing effects of viscosity and inertia* realizado por A. Faye, J. A. Rodríguez-Martínez y K. Y. Volokh (4), se plantea el problema de la expansión esférica de un elemento tipo poro analizando los efectos de la viscosidad y la inercia pero utilizando para ello ecuaciones de modelos viscoelásticos, similar a la investigación realizada por Cohen y Molinari en *Dynamic cavitation and relaxation in incompressible nonlinear viscoelastic solids* (18).

Ello implica que el análisis de este fenómeno en elastómeros continúa estudiándose a pesar de las numerosas investigaciones ya realizadas, pues existen multitud de materiales

hiperelásticos, parámetros que influyen el fallo del material y modelos que rigen el comportamiento del mismo.

A pesar de que la mayoría de estudios de la cavitación dinámica están limitados a velocidades de expansión moderadas, se ha descubierto recientemente que a velocidades altas aparecen ondas de choque (5). Estas se presentan debido a la gran deformación que se produce en el seno del material cuando se aplica una presión de forma instantánea.

En el caso de que el material sea compresible, la aparición de esta onda genera un cambio brusco en la variación de densidad del sólido, produciendo una caída en la curva Relación de densidades – Distancia en la dirección radial, que se presenta en la sección 5.2.

Las ondas de choque y las de sonido difieren en el frente de onda, que es una superficie imaginaria donde todos los puntos en un instante dado tienen el mismo estado de vibración. Ello supone que la forma de propagación de una onda de choque sea distinta a la de una onda sonora. Las del primer tipo se mueven a mayor velocidad que las segundas pero su intensidad disminuye más rápido porque las ondas de choque utilizan parte de su energía para atravesar el medio en el que se propagan.

Son un tipo de onda mecánica que se encuentran dentro de la categoría de ondas elásticas, donde se han de considerar las propiedades mecánicas del sólido para caracterizar de forma correcta la velocidad de la onda a través del material.

En *General Laws for Propagation of Shock Waves through Matter* de L. F. Henderson (19) se explica la información fundamental acerca de la propagación de las ondas de choque a través de cualquier material a partir de las ecuaciones de Rankine-Hugoniot, Raleigh y Bethe-Weyl.

También en *Numerical analysis of dynamic crack propagation in rubber biaxially strained rubber sheets* de E. Elmukashfi y M. Kroon (20), se analiza la dinámica de la fractura en materiales tipo caucho en base a la velocidad de la onda de Rayleigh.

Dado que el objetivo de este documento no es esclarecer el comportamiento de las ondas de choque, no se profundiza en este aspecto pero si es necesario tenerlas en cuenta a la hora de analizar la cavitación en un elastómero.

CAPÍTULO 4: MODELO NUMÉRICO

En este capítulo se realiza la descripción completa del problema así como el modelo numérico realizado en el software de elementos finitos Abaqus / Explicit, desarrollando los apartados más importantes como las condiciones de contorno y la malla final del modelo, realizando un análisis de su sensibilidad.

4.1 Descripción del problema

El estudio del fenómeno de cavitación dinámica se realiza en un elemento esférico tipo poro con una cavidad en su interior donde se aplica una presión constante considerando un medio infinito (ver Figura 5).

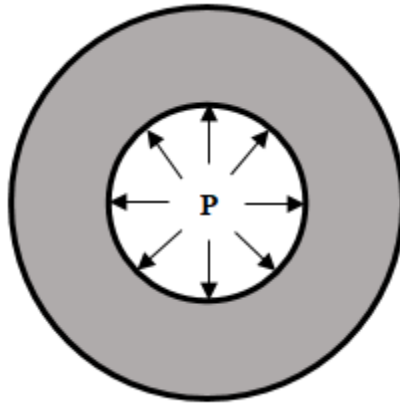


Figura 5. Elemento esférico tipo poro con una cavidad donde se aplica la carga

El material hiperelástico ensayado es un elastómero. Se caracteriza por mostrar una gran deformación elástica cuando se le aplica una fuerza.

En este tipo de compuestos, la cadena principal del polímero se encuentra enrollada debido a la disposición cis de sus grupos. Ello implica que cuando se aplica una carga a la cavidad, el polímero se alarga al desenredarse la cadena lineal mientras que cuando el esfuerzo cesa, las cadenas vuelven a enrollarse y el polímero regresa a su forma y tamaño original (11).

La elasticidad o rigidez de un elastómero viene dada por el número de entrecruzamientos de las cadenas y la cantidad de azufre. Esto supone que existan una gran cantidad de variantes como el caucho natural, con cadenas largas, enredadas y en espiral, cauchos de silicona y cauchos sintéticos. Estos últimos representan el 70% de todo el caucho existente en el mundo, con un amplio campo de aplicación en la industria por lo que para

este análisis se ha escogido un caucho de esta clase, el estireno-butadieno, SBR, que es un copolímero de estireno y butadieno que contiene entre un 20 y un 23 % de caucho natural cis-1,4 poliisopreno (11).

Sus propiedades se muestran en la Tabla 2.

Polímero	Carga de rotura (MPa)	Alargamiento (%)	Densidad (Kg/m ³)
Estireno-Butadieno	4-21	600-2000	950-1000

Tabla 2. Propiedades mecánicas del Estireno-Butadieno (11)

El rango de presiones ejercidas en la cavidad oscila entre 0,5 y 10 MPa, para unas condiciones determinadas:

- ❖ Dado que se trata de un elemento esférico, se considera simetría a $\frac{1}{4}$ con el objetivo de reducir el tiempo de cálculo (ver Figura 6).

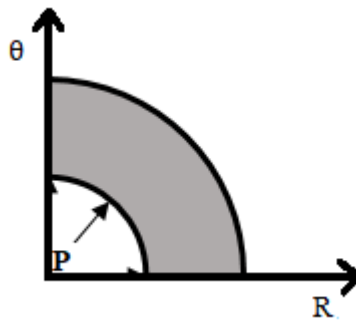


Figura 6. Simetría a 1/4 del elemento esférico

- ❖ Conservación del momento lineal en la dirección radial.
- ❖ No se consideran los efectos térmicos para focalizar el problema desde un punto de vista puramente mecánico.
- ❖ Isotropía, es decir, las propiedades mecánicas y térmicas del material son iguales en todas direcciones. Esto supone que las componentes de un tensor T de orden n isótropo permanecen invariantes frente a cualquier cambio en la orientación del sistema de referencias.
- ❖ Grandes deformaciones.

4.2 Modelo de elementos finitos

Para efectuar el análisis numérico se utiliza el código de elementos finitos Abaqus/Explicit donde se realizan dos estudios diferentes:

- ❖ En el primer caso se implementan las funciones del potencial de energía de deformación tipo Neo-Hookeano, Mooney-Rivlin y Ogden $N=1$, para un material incompresible e isótropo, donde se analiza la influencia del modelo constitutivo en la presión de cavitación.
- ❖ En el segundo estudio se implementan las mismas funciones del potencial de energía de deformación, pero para un material compresible e isótropo. En este caso se realiza un análisis paramétrico del coeficiente de Poisson para analizar su influencia en el proceso de expansión.

4.2.1 Geometría

La geometría y dimensiones del modelo de elementos finitos (ver Figura 7) se basa en el diseño de Rosenberg y Dekel (21), que se trata de un elemento esférico axisimétrico de radio exterior $R_s = 300$ mm con una pequeña cavidad en el centro de radio $R_c = 0,5$ mm.

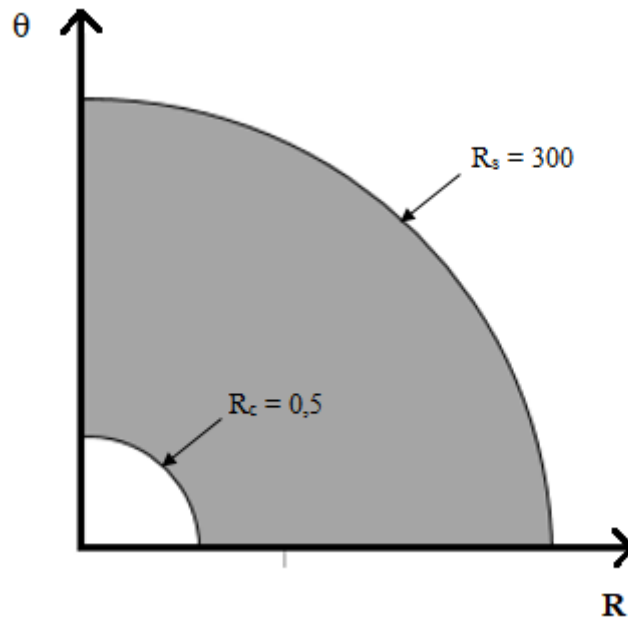


Figura 7. Geometría del modelo con unidades en mm

4.2.2 Caracterización del material

Para definir el comportamiento del material, se considera una densidad de 950 kg/m^3 y un comportamiento hiperelástico, donde los valores de las variables de los modelos Neo-Hookeano, Mooney-Rivlin y Ogden N=1 presentados en la sección 2.2.1 son (8):

Neo-Hookeano:

$$C_{10} [Pa] = 191999,034$$

Mooney-Rivlin:

$$C_{10} [Pa] = 210587,307$$

$$C_{01} [Pa] = 1504,76719$$

Ogden N=1:

$$C_{10}^{01} [Pa] = 359237,938$$

$$\alpha_{10}^{01} [Pa] = 2,11120130$$

El parámetro D_1 presente en los 3 modelos hiperelásticos viene dado por la expresión (10):

$$D_1 = \frac{2}{K_0} = \frac{3(1 - 2\nu)}{\mu_0(1 + \nu)}$$

donde

- ❖ K_0 es el módulo de compresibilidad inicial, cuyo valor por defecto es 1,2.
- ❖ μ_0 es el módulo de cortadura inicial. Su valor por defecto es 0,06.
- ❖ ν es el coeficiente de Poisson.

Para el primer caso de estudio se considera un material incompresible. Por lo tanto, el valor del parámetro D_1 es 0. Sin embargo, no es posible asumir un comportamiento totalmente incompresible en Abaqus/Explicit sino que se considera cierta compresibilidad para que los algoritmos funcionen correctamente. Si no se da ningún valor al parámetro D_1 , el software asume un coeficiente de Poisson de 0,475, cercano al valor para el caso incompresible de 0,5.

Para el segundo estudio se considera compresibilidad en el material. Se ha analizado el proceso de expansión para 3 valores del coeficiente de Poisson, mostrados en la Tabla 3.

D_1	K_0	μ_0	Coefficiente de Poisson
33,929	0,059	0,060	0,120
15,385	0,130	0,060	0,300
3,448	0,580	0,060	0,450

Tabla 3. Valores del coeficiente de Poisson en función del módulo de compresibilidad, cortadura y el parámetro D_1

4.2.3 Carga y condiciones de contorno

La carga aplicada a la cavidad se ha distribuido uniformemente a lo largo de la misma, considerando una amplitud instantánea. Los valores de presión estudiados son: 0,5 MPa, 1 MPa, 5 MPa, 8 MPa y 10 MPa.

Por otro lado, se ha restringido el movimiento en 2 direcciones, R y θ , considerando las siguientes condiciones de contorno:

- ❖ Dirección R : desplazamiento/rotación con distribución uniforme y amplitud instantánea donde $U_2 = 0$. En este caso, es equivalente a aplicar la condición de simetría en el plano $Y = \text{constante}$, $YSYMM$, con grados de libertad 2, 4, 6 = 0.
- ❖ Dirección θ : desplazamiento/rotación con distribución uniforme y amplitud instantánea donde $U_1 = 0$. Esta condición resulta similar si se aplica simetría en el plano $X = \text{constante}$, $XSYMM$, con grados de libertad 1, 5, 6 = 0.

4.2.4 Malla

Para realizar un mallado correcto del modelo, primero es necesario analizar su sensibilidad, es decir, cuánto varían los resultados en función de los elementos que contenga el modelo.

Como se ha explicado en la sección 3.1, una de las formas de analizar la cavitación es estudiando la evolución de la velocidad de expansión en función del tiempo. Cuando esta se estabiliza, el material ha cavitado y, por tanto, ha colapsado. En base a esto, se puede realizar un análisis de la sensibilidad de la malla.

El procedimiento seguido es el siguiente:

- ❖ Establecer el número de elementos en la dirección circunferencial y radial, para un *Bias ratio* de 100. Este último parámetro permite aumentar el número de elementos en zonas próximas a la cavidad, mejorando los resultados.
- ❖ Ensayar el modelo para una presión de 10 MPa utilizando la forma hiperelástica Mooney-Rivlin. Cabe destacar que el ensayo se puede realizar también utilizando la forma Neo-Hookean u Ogden N=1.
- ❖ Analizar la evolución de la velocidad de expansión frente al tiempo.
- ❖ Realizar una comparación entre las distintas curvas para diferentes mallados.

Los diferentes mallados realizados se muestran en la Tabla 4, donde también se especifican los elementos en la dirección circunferencial, los elementos en la dirección radial θ y R y el número de elementos totales del modelo.

Malla	Elementos en la dirección circunferencial	Elementos en la dirección radial	Elementos totales
1	40	240	9.600
2	50	300	15.000
3	80	600	48.000
4	140	900	126.000
5	170	1.000	170.000
6	200	1.200	240.000

Tabla 4. Elementos de las distintas configuraciones de malla

En la Figura 8 se muestran los resultados obtenidos para distinto número de elementos. Se observan diferencias en la evolución de la curva Velocidad de expansión – Tiempo para cada mallado.

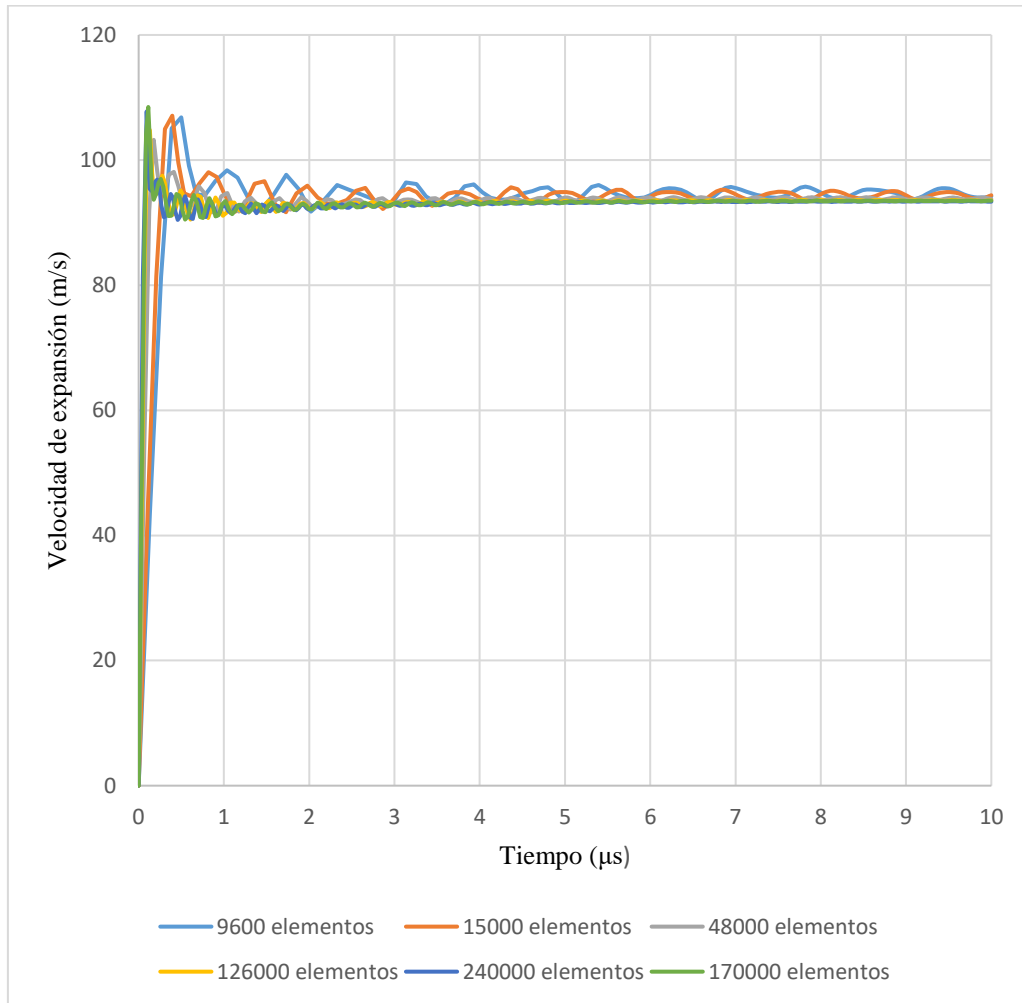


Figura 8. Evolución de la velocidad de expansión para distintas mallas

Para un número de elementos inferior, se producen mayores oscilaciones en la curva que en el resto de casos, lo que implica que los resultados son menos precisos. Además, el tiempo de cálculo es inferior en los mallados más sencillos que en los que contienen un mayor número de elementos. Esto es debido a que el tamaño de estos es mayor, obteniendo información menos precisa de lo que le ocurre al sólido en cada uno de sus puntos.

Realizando un zoom para la zona de la curva donde se observan mayores diferencias entre las mallas (ver Figura 9), se llega a la conclusión de que a partir de 170.000 elementos, la evolución de la velocidad de expansión a lo largo del tiempo es similar que en mallados superiores como el de 240.000 elementos. Ello implica que realizando un mallado con este número de elementos, se obtienen resultados satisfactorios.

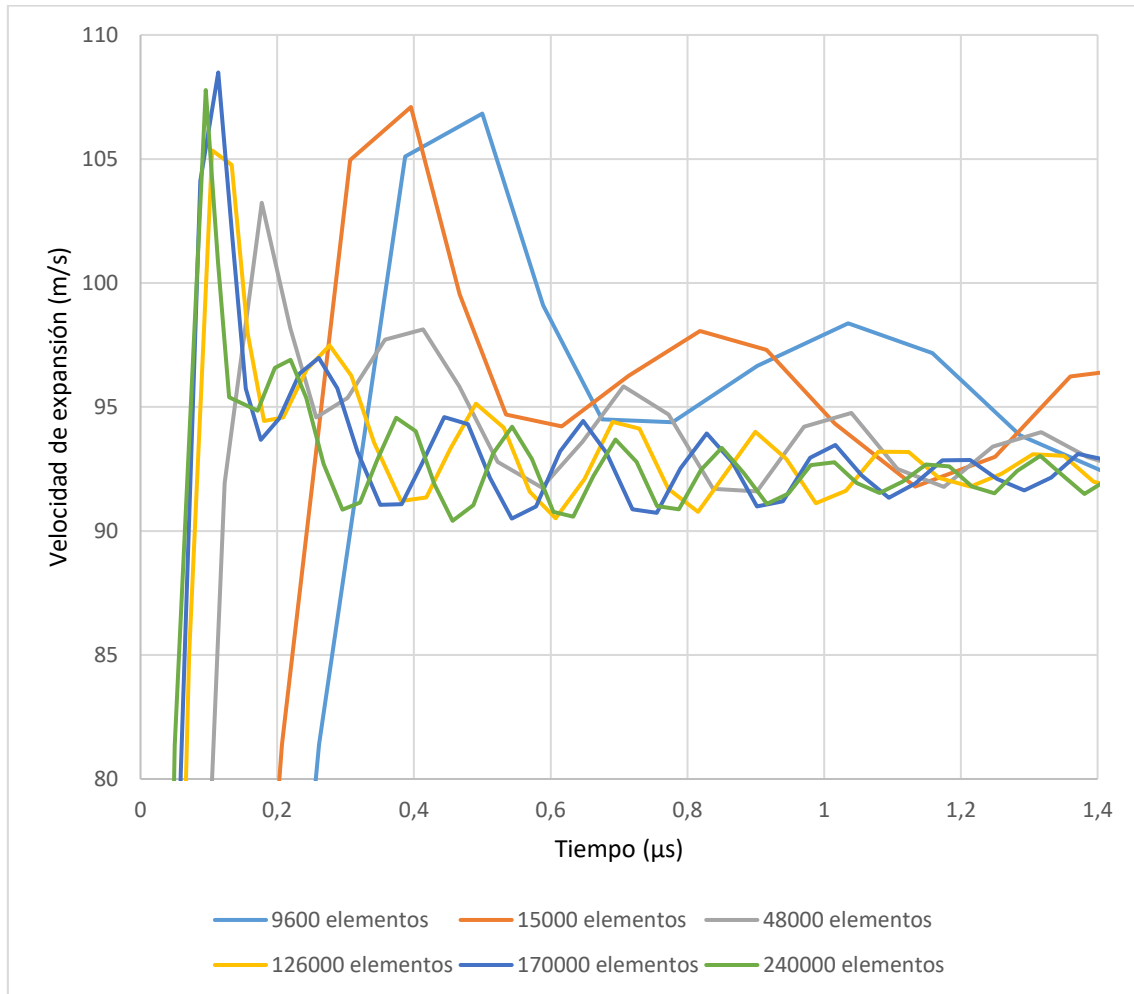


Figura 9. Zoom realizado en la curva Velocidad de expansión - Tiempo donde se observan mayores diferencias entre las mallas

No obstante y dado que el tiempo computacional no es importante en este caso, el modelo ha sido mallado utilizando 240.000 elementos cuadriláteros lineales tipo CAX4R (A 4-node bilinear axisymmetric quadrilateral, reduced integration, hourglass control) con un total de 241.401 nodos.

Tras establecer el número de elementos en cada dirección, se ha realizado el mallado del modelo mediante la técnica de *Sweep* con elementos tipo *Quad*.

Por último, se ha verificado la calidad de la malla con el criterio que establece Abaqus/Explicit por defecto, para asegurar que no existan errores en la disposición de los elementos a lo largo del modelo.

En la Figura 10 se muestra el modelo de elementos finitos con la malla de 240.000 elementos con la zona de la cavidad ampliada, donde el tamaño de estos es menor para

mejorar los resultados. En este caso, los elementos más pequeños tienen unas dimensiones de 12 μm de largo por 4 μm de alto.

La malla muestra la simetría radial del modelo, realizada para disminuir el tiempo de cómputo y minimizar las posibles interferencias de esta en los cálculos.

Sin embargo, las grandes tensiones y deformaciones que se producen en la cavidad del sólido pueden generar excesiva distorsión. Por ello, se ha disminuido el *Time Step*, parámetro que está directamente relacionado con el tiempo de cálculo, a un valor de $1 \cdot 10^{-5}\text{s}$, siendo satisfactorios los resultados obtenidos.

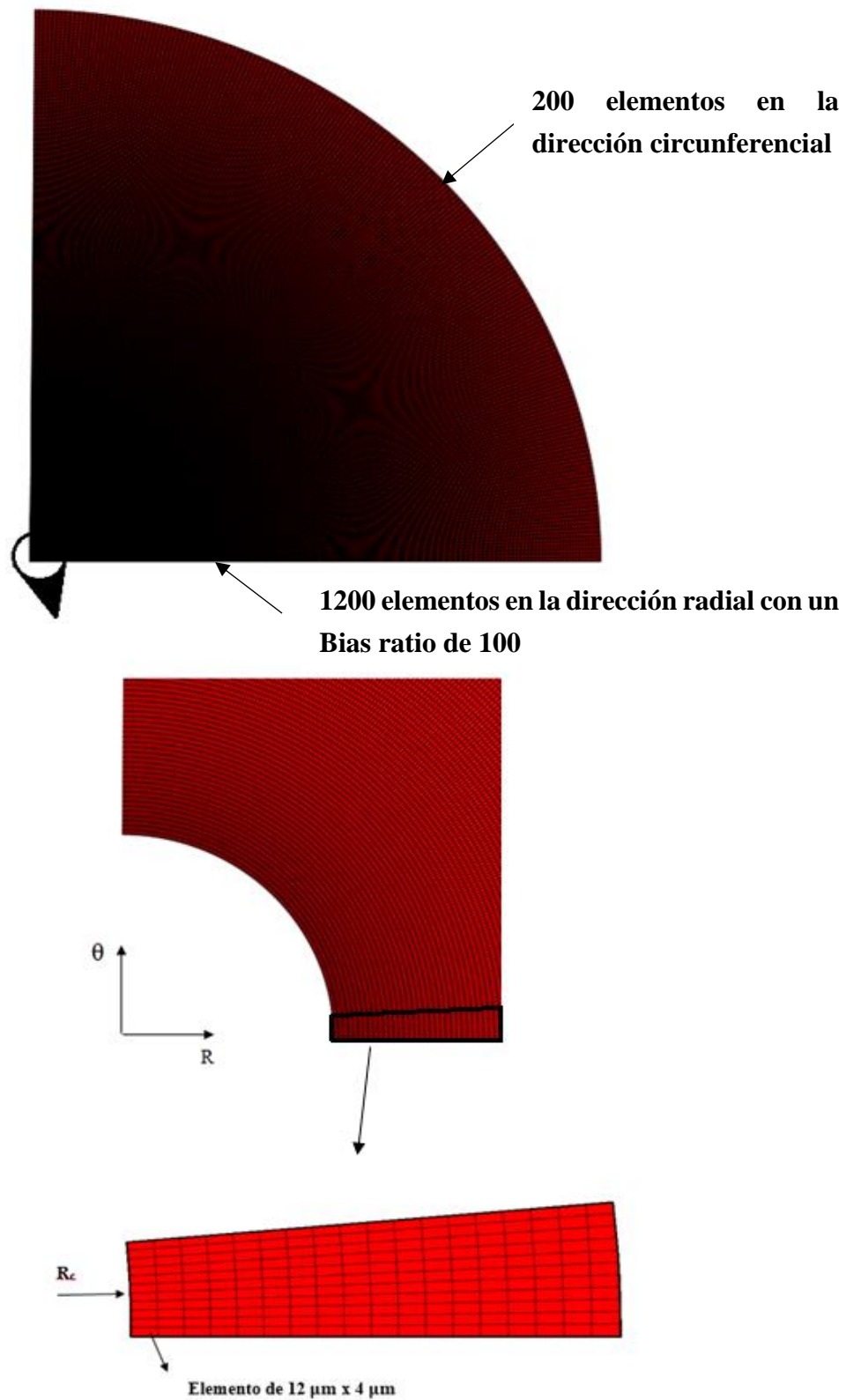


Figura 10. Malla final del modelo con detalles en la zona de la cavidad

CAPÍTULO 5: RESULTADOS

En este capítulo se explican los resultados obtenidos, tanto del estudio de la influencia del modelo hiperelástico en el fenómeno de cavitación como del análisis paramétrico del coeficiente de Poisson.

5.1 Influencia del modelo constitutivo en la cavitación

Como se ha explicado en la sección 3.1, cuando el sólido alcanza la cavitación, la velocidad de expansión se estabiliza en un valor finito mientras que la aceleración se hace 0. Esto supone que analizando la evolución de la velocidad de expansión en función del tiempo para una presión determinada, se puede conocer el punto exacto en el que el material ha cavitado. Análogamente, el estudio se puede realizar analizando el instante de tiempo en el que la aceleración toma un valor nulo.

Esto implica que realizando este estudio para cada modelo constitutivo hiperelástico a una presión determinada, se pueden conocer las diferencias entre cada uno de ellos y su influencia en este fenómeno.

En la Figura 11, Figura 12, Figura 13, Figura 14 y Figura 15 se muestra la evolución de la velocidad de expansión frente al tiempo para presiones que van desde los 0,5 MPa hasta los 10 MPa.

Para el caso donde la presión aplicada es de 0,5 MPa (ver Figura 11), la velocidad de expansión de la cavidad crece rápidamente hasta un valor determinado para posteriormente decrecer hasta 0. Esto indica que la carga aplicada es menor que el valor crítico donde se produce la expansión descontrolada del sólido. El comportamiento de la curva en este caso implica que el sólido alcanza una nueva configuración de equilibrio estático.

En cuanto a la influencia del modelo constitutivo utilizado para esta presión, se observa que la velocidad de expansión en la forma Mooney-Rivlin alcanza un valor nulo en un tiempo menor respecto al resto de modelos. Además, el valor límite de la velocidad también es inferior en comparación con las formas Neo-Hookeano y Ogden $N=1$.

La curva Velocidad de expansión – Tiempo en los modelos Neo-Hookeano y Ogden $N=1$ no decae de una forma tan brusca como en el caso de Mooney-Rivlin. Ello implica que, en este caso, cuanto mayor es el valor de la velocidad de expansión alcanzada, más tiempo

tarda en alcanzarse la nueva configuración de equilibrio, es decir, la relación es directamente proporcional.

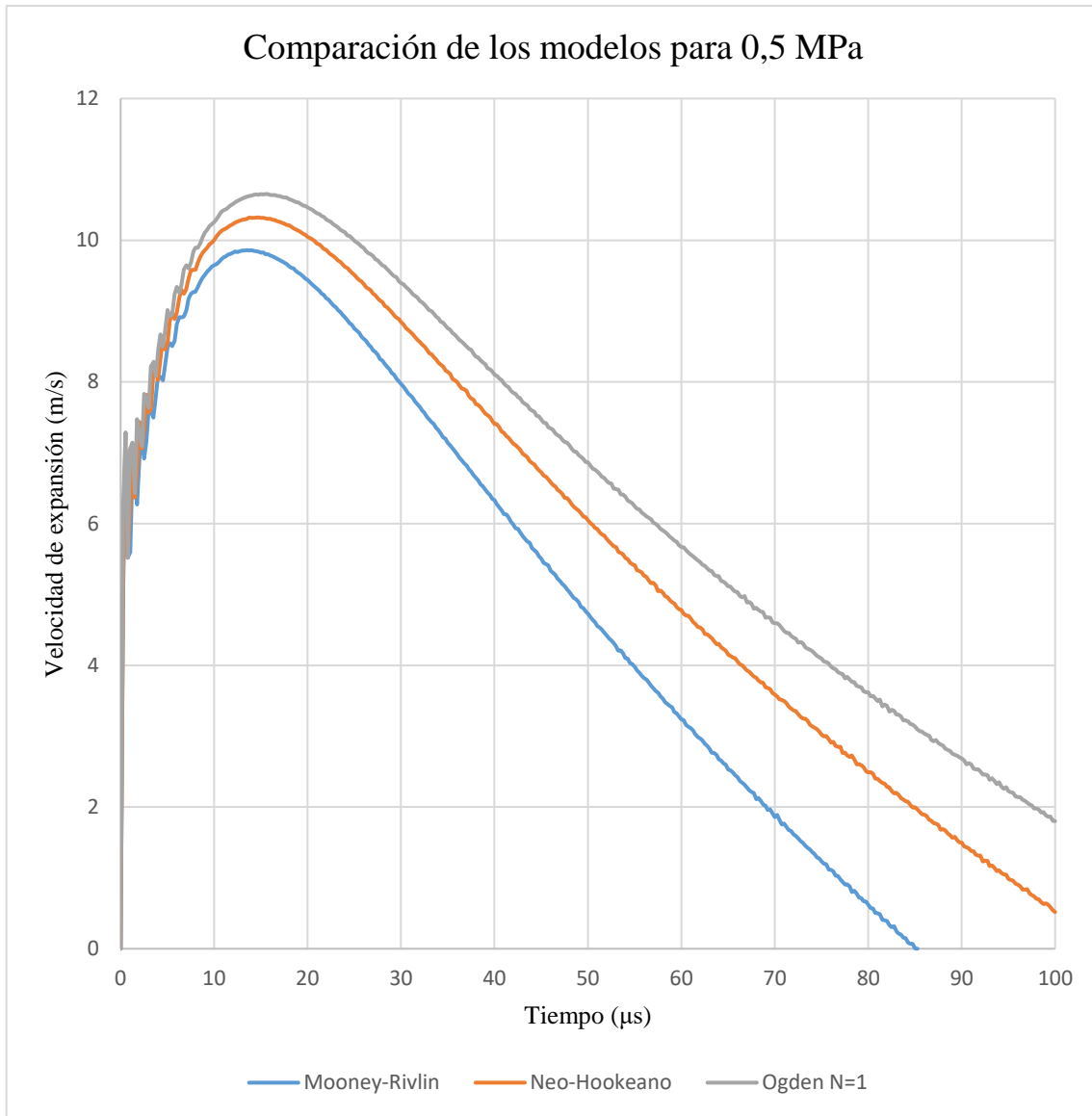


Figura 11. Comparación de los modelos para una presión de 0,5 MPa

Cuando la presión aplicada en la cavidad es de 1 MPa (ver Figura 12), la evolución de la curva es similar al caso de 0,5 MPa, es decir, la velocidad de expansión de la cavidad crece rápidamente hasta un valor determinado para posteriormente decrecer. Sin embargo, en este caso, la zona donde se produce el descenso es mucho más suave, alcanzándose una nueva configuración de equilibrio en un tiempo mucho mayor.

La influencia del modelo constitutivo en este caso es similar a lo que ocurre para una carga de 0,5 MPa, la zona de decrecimiento de la curva Velocidad de expansión – Tiempo es más acusada para el modelo Mooney-Rivlin, mientras que las formas Neo-Hookeano

y Ogden N=1 siguen una tendencia similar, siendo la velocidad de expansión inferior en la primera de ellas.

Todo ello implica que para una carga de 1 MPa no se supera el valor crítico de presión para que el sólido cavite.

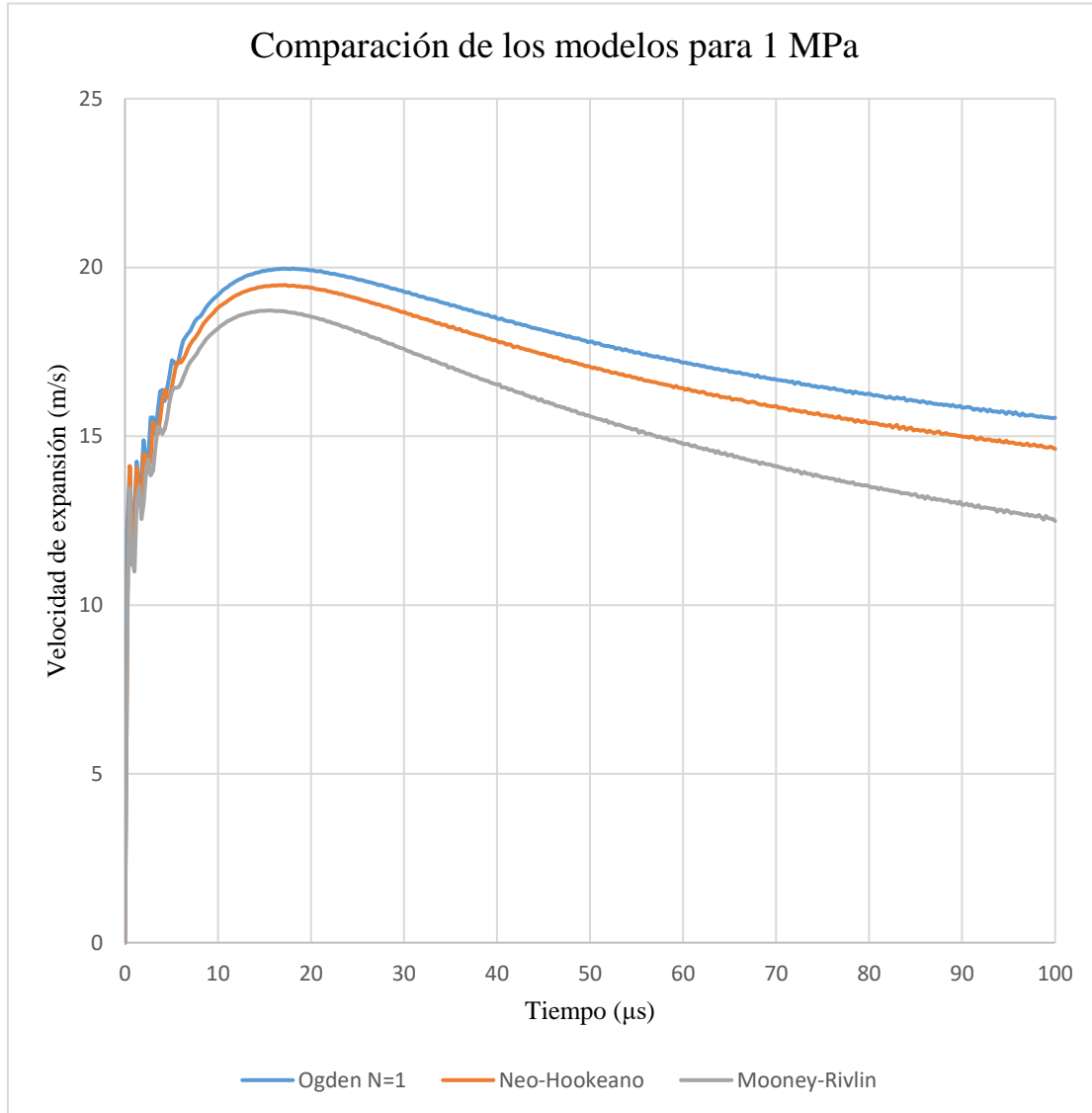


Figura 12. Comparación de los modelos para una presión de 1 MPa

Para una carga aplicada de 5 MPa (ver Figura 13), se observa que la evolución de la curva Velocidad de expansión – Tiempo es notablemente diferente a los dos casos anteriores. En el instante inicial se produce un rápido crecimiento de la velocidad para posteriormente aproximarse a un valor finito asintóticamente. En este caso si se observa cierta estabilidad en la curva lo que implica que el valor crítico donde se produce la expansión descontrolada de la cavidad es próximo a 5 MPa.

Utilizando la expresión de la presión crítica formulada por A.N. Gent y C. Wang en *Fracture mechanics and cavitation in rubber-like solids* (ver sección 3.1):

$$P_c = \frac{5E}{6} \quad (5.1)$$

donde E es el módulo de Young del caucho, siendo su valor de 1000 psi ($\approx 6,89476$ MPa) (22), se obtiene que el valor crítico es 5,74 MPa.

Esto concuerda con los resultados obtenidos para el ensayo a 5 MPa ya que, como se ha explicado, la curva se aproxima a un valor finito y estable de forma asintótica pues el valor de la carga es cercano al crítico.

Tomando como referencia $P_c = 5,74$ MPa, para valores de carga aplicada superiores, las curvas deben estabilizarse en un valor finito.

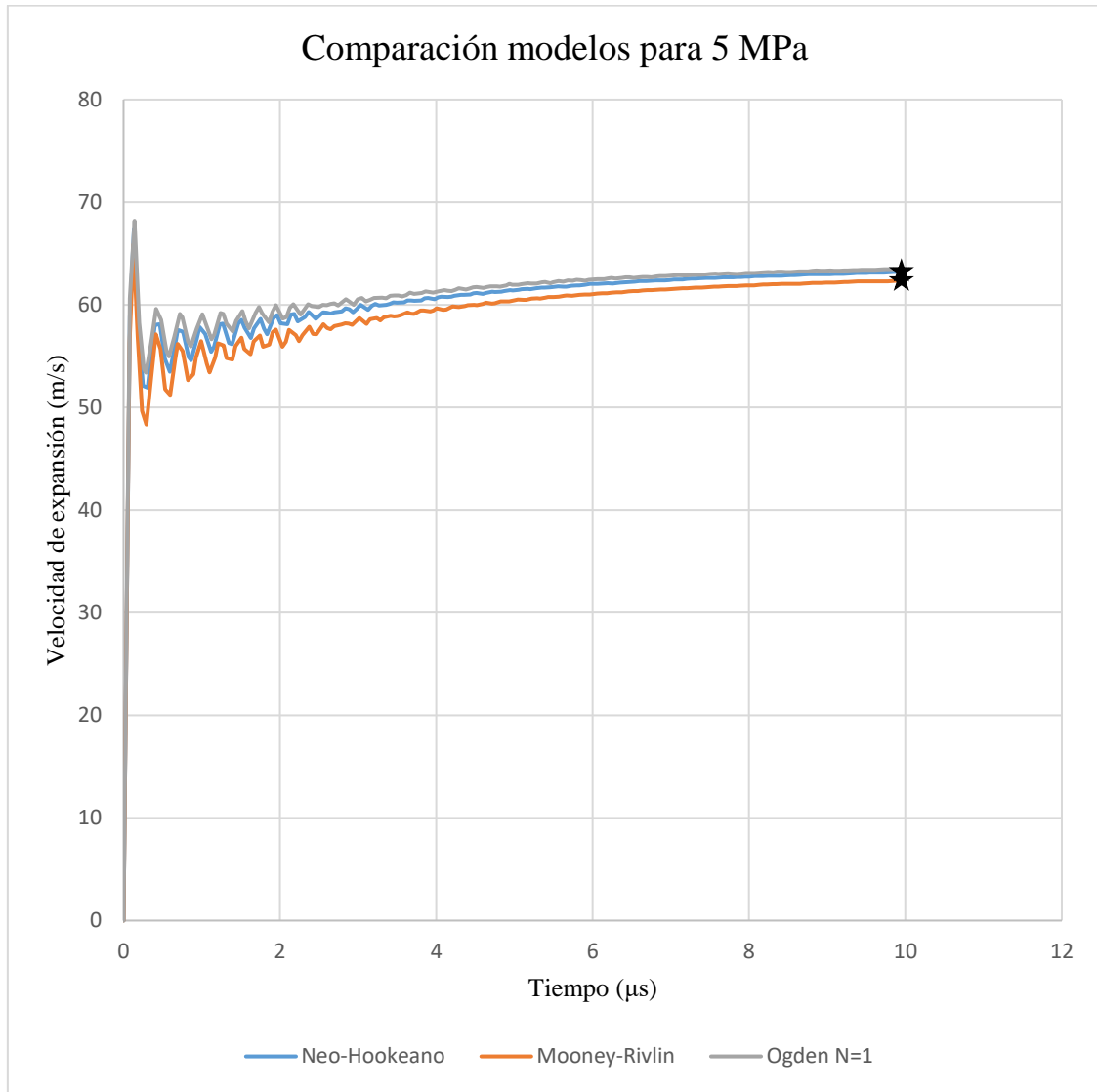


Figura 13. Comparación de los modelos para una presión de 5 MPa

Cuando la presión aplicada en la cavidad es de 8 MPa (ver Figura 14), el comportamiento de la curva varía con respecto a presiones inferiores. Hasta un tiempo $t = 0,1 \mu s$, la velocidad crece de forma súbita. Posteriormente, en los 3 modelos ensayados: Mooney-Rivlin, Neo-Hookeano y Ogden N=1, se observa el mismo comportamiento: la curva comienza a estabilizarse en un determinado valor para un instante de tiempo t , lo que implica que el sólido ha cavitado.

Por ende, el valor de la presión crítica de A.N. Gent y C. Wang resulta satisfactorio.

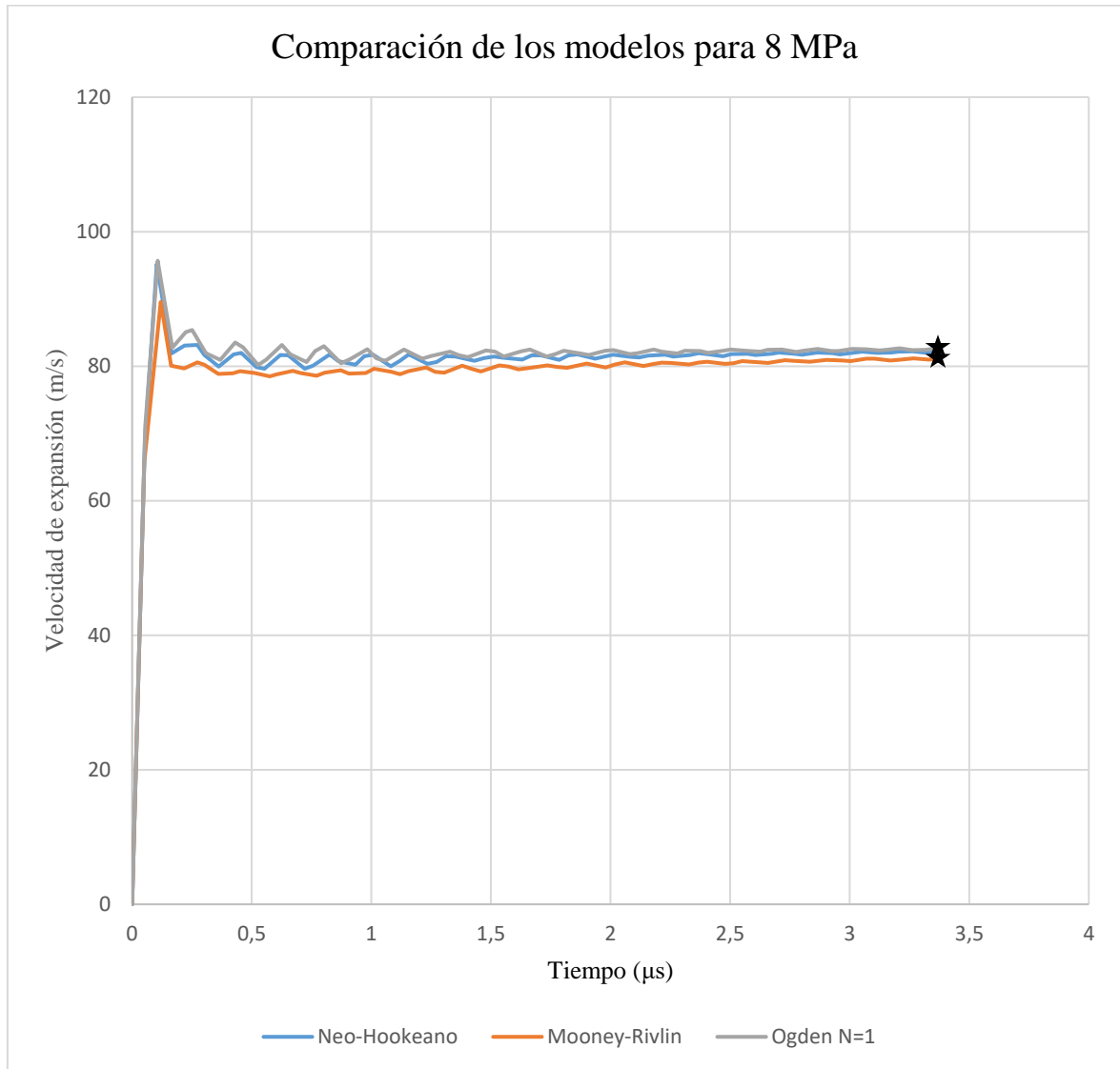


Figura 14. Comparación de los modelos para una presión de 8 MPa

Por último, para un valor de carga de 10 MPa (ver Figura 15) se observa la misma tendencia en la curva que para 8 MPa. La principal diferencia es que el tiempo en el que se alcanza la estabilidad de la velocidad es menor, lo que implica que conforme se aumenta la presión, el tiempo en el que se da la cavitación es menor, es decir, la relación es inversamente proporcional.

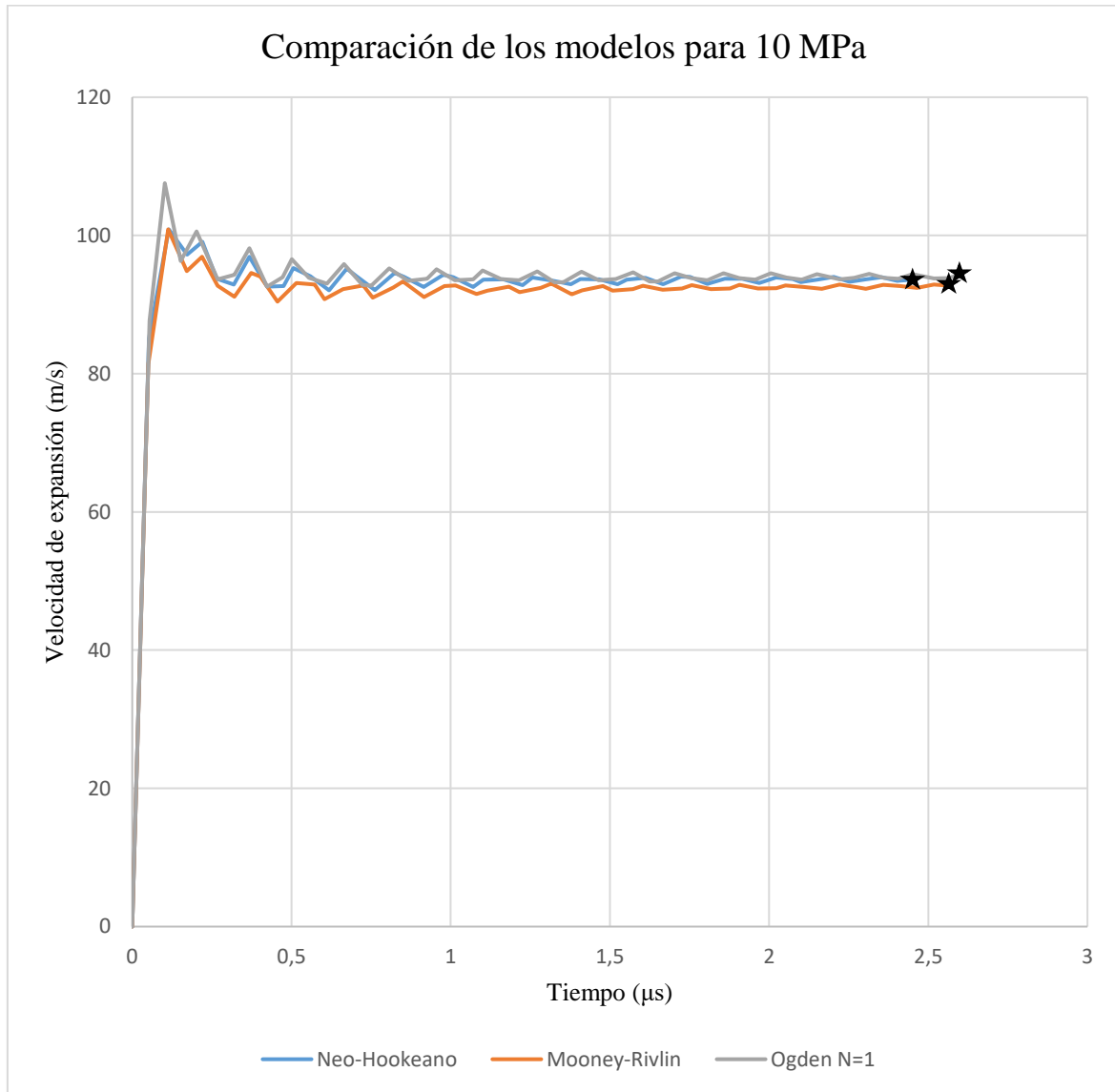


Figura 15. Comparación de los modelos para una presión de 10 MPa

Por ende, conociendo el instante de tiempo t donde se produce la estabilidad de la velocidad de expansión, se puede obtener la deformación que ha sufrido la cavidad en ese punto. Esto resulta muy útil ya que conociendo la presión a la que se somete el sólido, se puede obtener la deformación que puede sufrir antes de cavitarse y, por tanto, se puede predecir la rotura del material.

En el caso de los neumáticos, permite trabajar con un margen de seguridad que garantice su correcto funcionamiento mientras que en el campo de la medicina, permite predecir la rotura de las arterias en el caso de que el paciente sufra hipertensión o cualquier otra patología que genere un ensanchamiento anormal de la pared arterial.

Por otro lado, estableciendo una relación entre la presión aplicada a la cavidad y la velocidad a la que se produce la cavitación, se observa que la evolución de la curva sigue una tendencia exponencial (ver Figura 16):

$$P(v) = a^{rv} \quad (5.2)$$

donde

- ❖ a es una constante mayor que 1.
- ❖ r es la tasa de crecimiento instantánea.
- ❖ v es la velocidad a la que se produce la cavitación.

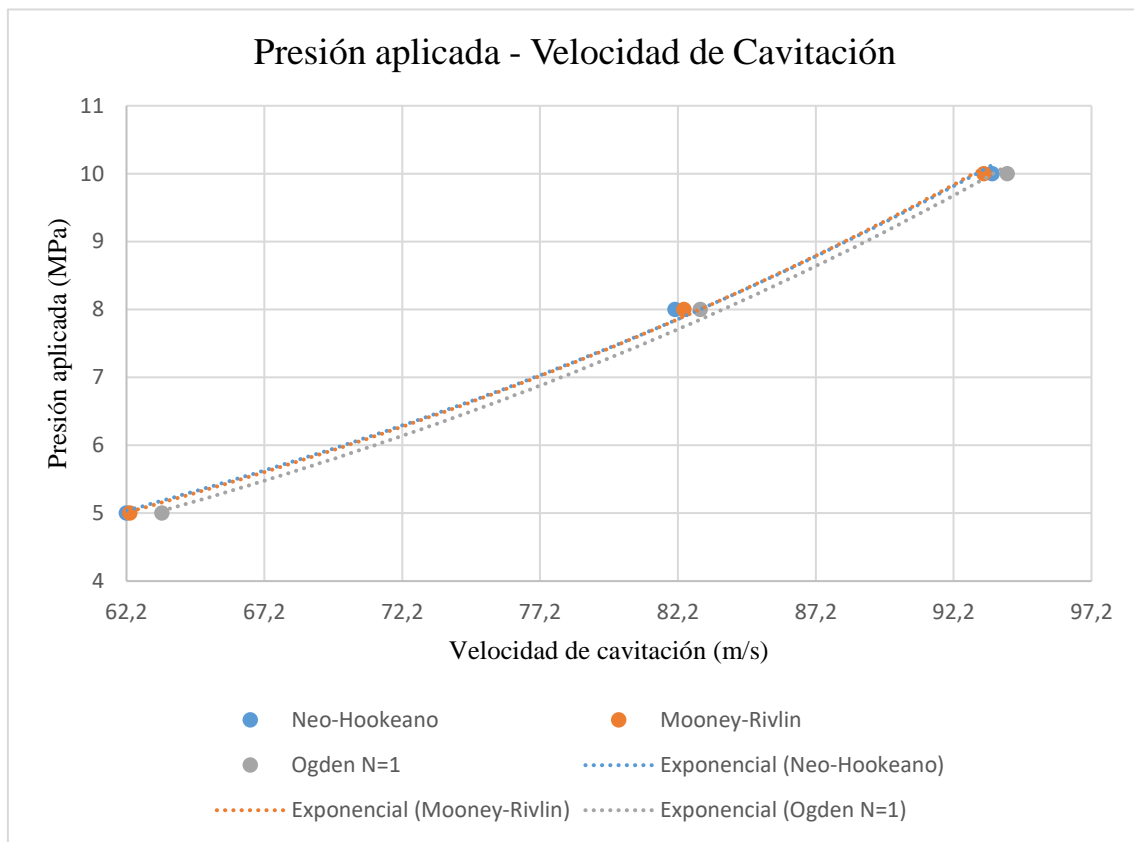


Figura 16. Presión aplicada en la cavidad frente velocidad de cavitación para distintos modelos hiperelásticos

Ello supone que la presión aplicada en la cavidad y la velocidad de cavitación se relacionan de manera no lineal. Por ende, conforme se avanza en el eje X, el valor en el eje Y aumenta de forma más rápida por lo que, para un cierto valor de velocidad de cavitación, la presión tendrá un valor próximo a infinito.

Además, se observa que la tendencia de la curva Presión aplicada – Velocidad de cavitación es similar para los 3 modelos, lo que implica que todos ellos predicen un comportamiento del material similar (ver Tabla 5).

Neo-Hookeano		Mooney-Rivlin		Ogden N=1	
Velocidad de cavitación (m/s)	Presión (MPa)	Velocidad de cavitación (m/s)	Presión (MPa)	Velocidad de cavitación (m/s)	Presión (MPa)
62,22	5	62,32	5	63,48	5
82,13	8	82,42	8	83,01	8
93,64	10	93,31	10	94,15	10

Tabla 5. Valores de velocidad de cavitación para distintos valores de presión

Por último, en la Figura 17 se muestra la distribución de presiones en la zona próxima a la cavidad para un tiempo $t = 3 \mu s$ para solicitaciones de 1 MPa, 5 MPa y 10 MPa.

Dado que el radio de la cavidad es notablemente inferior al radio del sólido, existe una zona de color azul donde la presión es nula, mientras que en las zonas próximas a la cavidad se encuentran las mayores presiones. Para el caso donde la carga aplicada es inferior, la expansión que sufre el sólido es inferior respecto al resto de solicitaciones, observándose de forma más clara el desarrollo de la presión a lo largo de los distintos elementos.

Como se ha explicado en la sección 3.1, el valor crítico de la presión para que el sólido cavite es de 5,74 MPa. Por este motivo, para el caso donde la solicitación es de 10 MPa se ha realizado un pequeño zoom pues la deformación que se produce en el sólido es muy elevada.

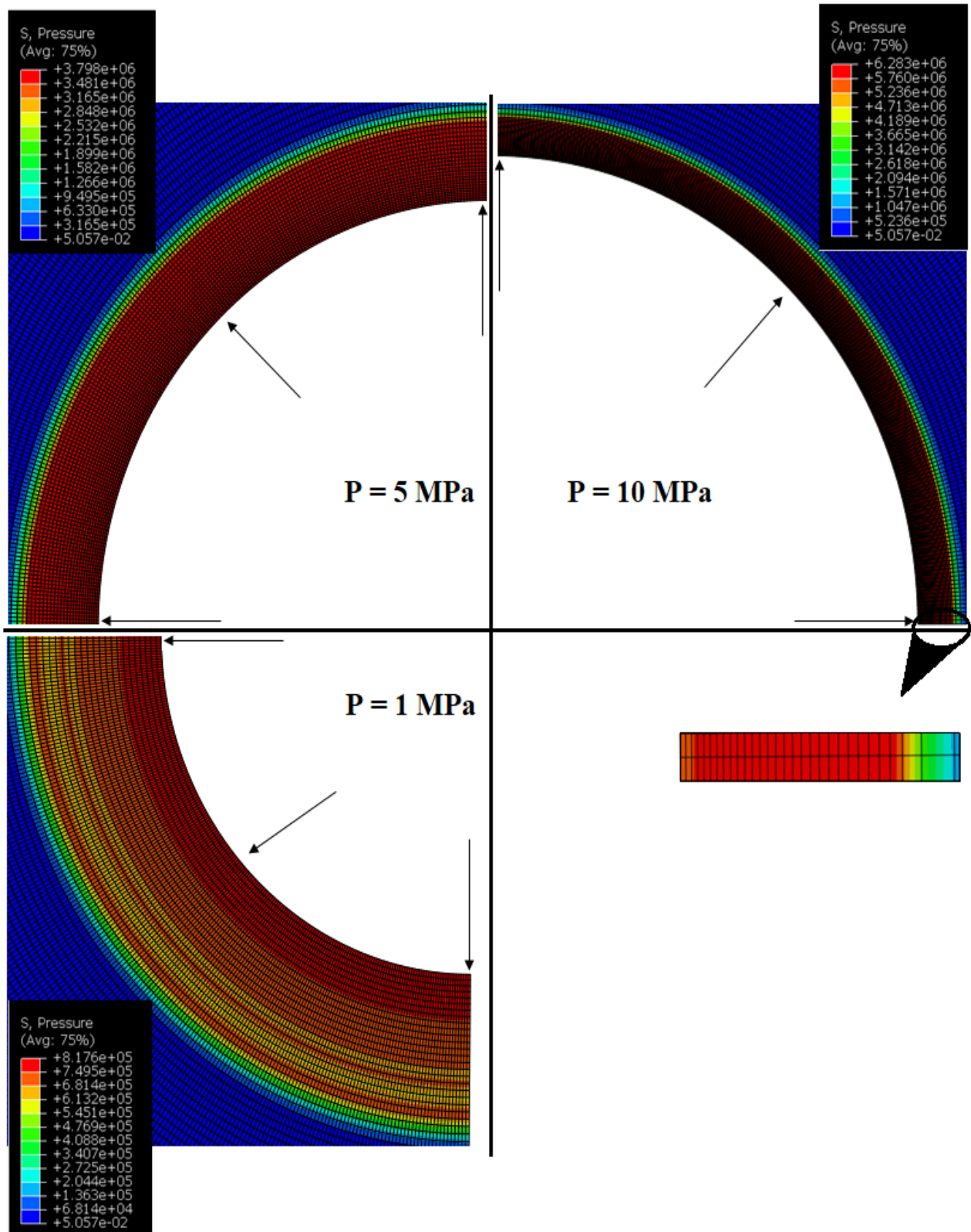


Figura 17. Evolución de la cavidad para un tiempo de $3 \mu\text{s}$ para distintos valores de presión. Unidades en Pa

5.2 Efecto de la compresibilidad en el modelo constitutivo

Para conocer los efectos de la compresibilidad en los modelos constitutivos, se realiza un análisis paramétrico del coeficiente de Poisson, en este caso, $\nu = 0,12$, $\nu = 0,3$ y $\nu = 0,45$. Ello supone que la evolución de la densidad y, por tanto, del volumen, a lo largo del tiempo no es constante sino que se producen variaciones significativas.

En este caso, para conocer el instante donde el sólido cavita, se ha graficado la evolución de la relación de densidades $\frac{\rho_0}{\rho}$ a lo largo de la distancia radial. Un decrecimiento brusco en la curva supone que el material falla debido a la aparición de la onda de choque, la cual genera un notable cambio en la resistencia del mismo.

No obstante, también se puede conocer cuándo cavita el material analizando la velocidad de expansión del mismo, pues en el instante donde se produce la falla, la curva también decrece bruscamente por el mismo motivo.

Esto no ocurre en el caso incompresible ya que, utilizando la ecuación que permite calcular la velocidad de una onda longitudinal o de compresión V_c a través de un material, presentada en *Handbook of Nondestructive Evaluation* de C. Hellier (23):

$$V_c = \sqrt{\frac{E}{\rho} \cdot \frac{(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2 \cdot \nu)}} \quad (5.3)$$

donde

- ❖ E es el módulo de Young del caucho, cuyo valor es $\cong 7$ MPa.
- ❖ ρ es la densidad del material, cuyo valor es 950 kg/m^3
- ❖ ν es el coeficiente de Poisson.

Y considerando un coeficiente de Poisson para el caso isócoro de $\nu \cong 0,5$, no se detecta la onda de choque en este estudio. Esto concuerda con los resultados obtenidos por J.A. Rodríguez-Martínez, T. Cohen y R. Zaera en *Approaching steady cavitation: The time scale in hypervelocity cavity expansion in work hardening and transformation hardening solids* (16).

En la Figura 18, Figura 19 y Figura 20, se muestra la evolución de la relación de densidades a lo largo de la dirección radial en el instante donde se produce la cavitación. En este caso se aplica 1 MPa de presión en la cavidad, para los 3 coeficientes de Poisson analizados, en los modelos hiperelásticos Mooney-Rivlin, Neo-Hookeano y Ogden $N=1$.

En las 3 gráficas se observa la misma tendencia: en el modelo Ogden N=1, la caída de la curva se produce en una distancia en la dirección radial menor, es decir, el sólido cavita para un desplazamiento de la cavidad inferior. Por otro lado, en la forma Mooney-Rivlin, el decrecimiento brusco de la curva se da en una distancia radial mayor que en los otros 2 modelos, por ende, la cavitación se produce en un instante de tiempo superior.

Realizando una comparación directa de la distancia en la dirección radial donde se da la cavitación, se obtiene que para el caso Ogden N=1, la cavitación se da en una distancia un 7,14 % menor que en Neo-Hookeano y un 17,72 % inferior que en Mooney-Rivlin. Por tanto, existen notables diferencias entre los modelos para el caso no isócoro.

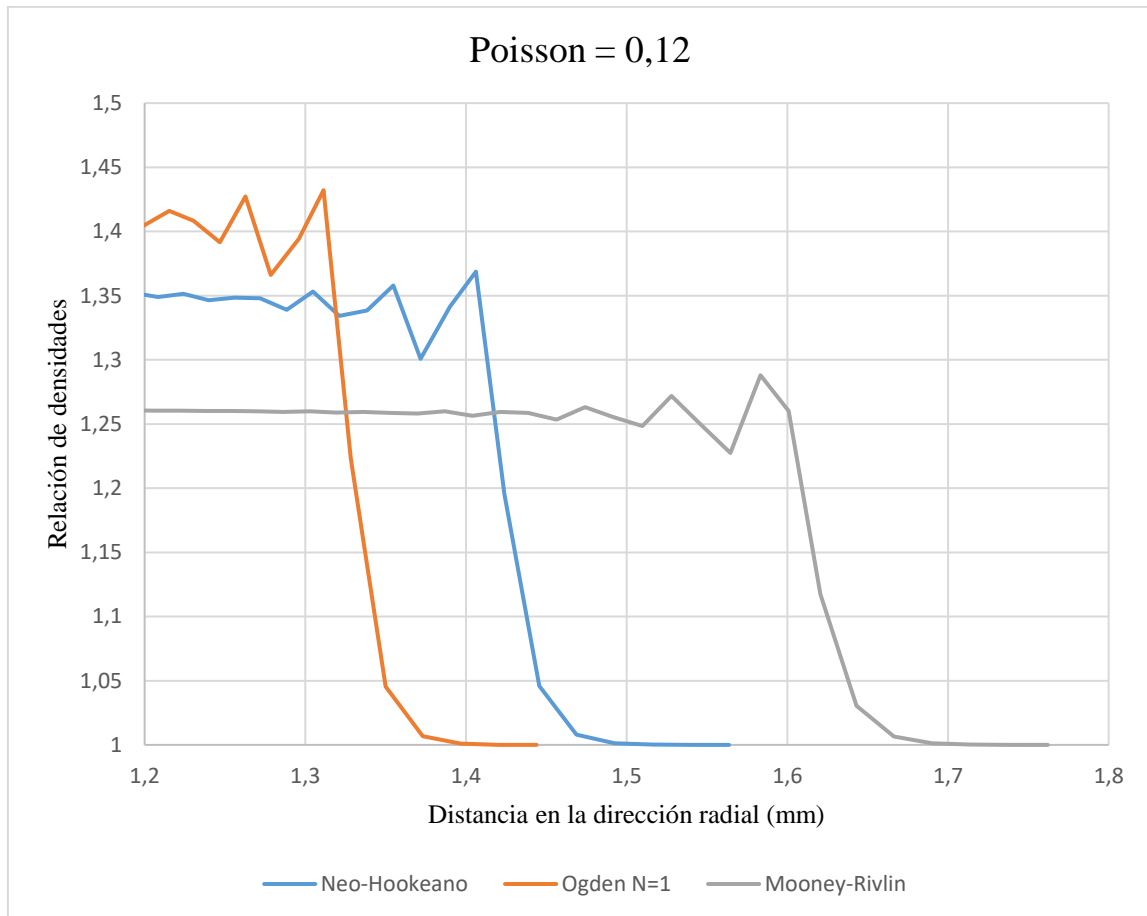


Figura 18. Curva Relación de densidades - Distancia en la dirección radial para los 3 modelos hiperelásticos, considerando un coeficiente de Poisson de 0,12

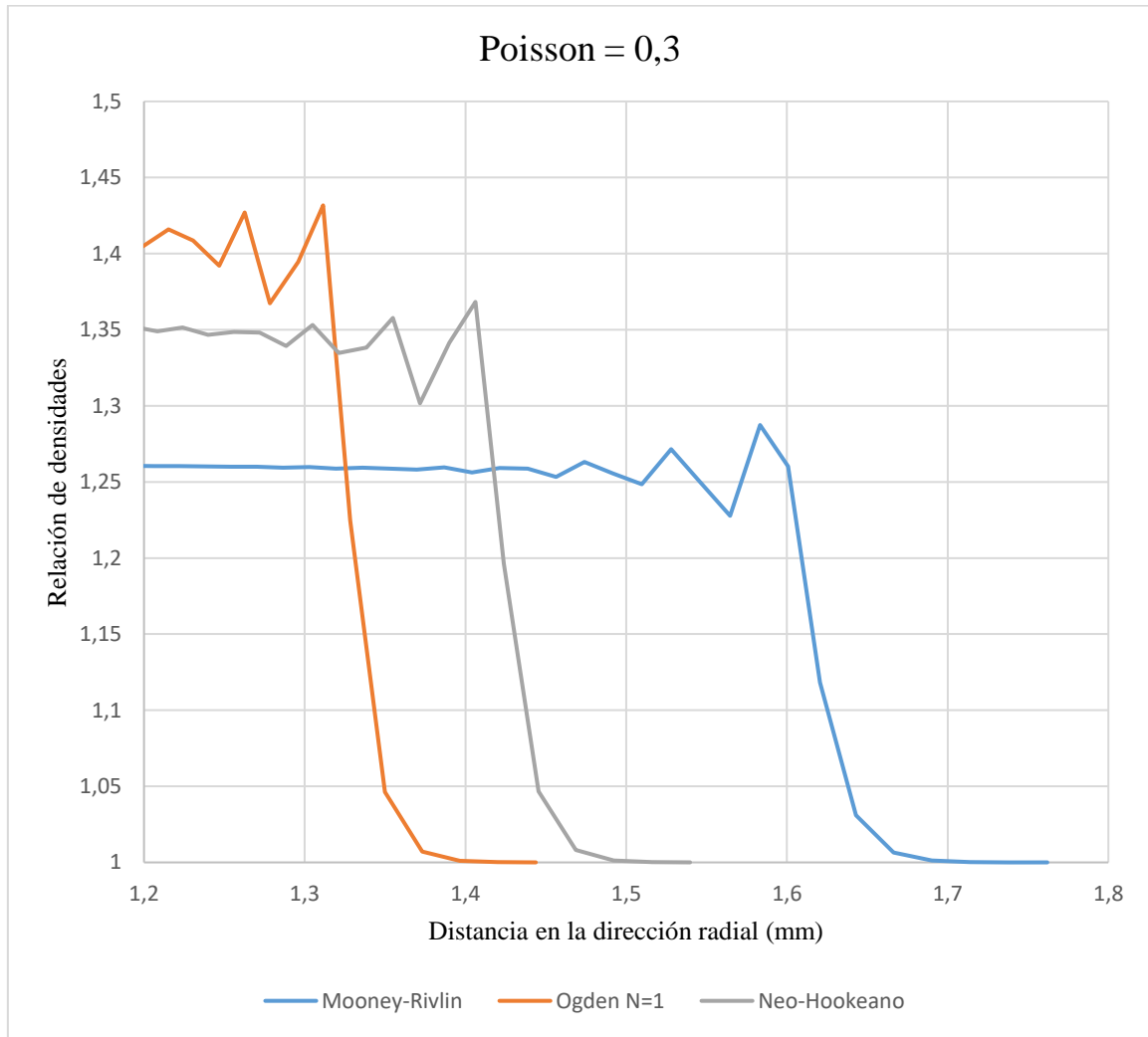


Figura 19. Curva Relación de densidades - Distancia en la dirección radial, para los 3 modelos hiperelásticos, considerando un coeficiente de Poisson de 0,3

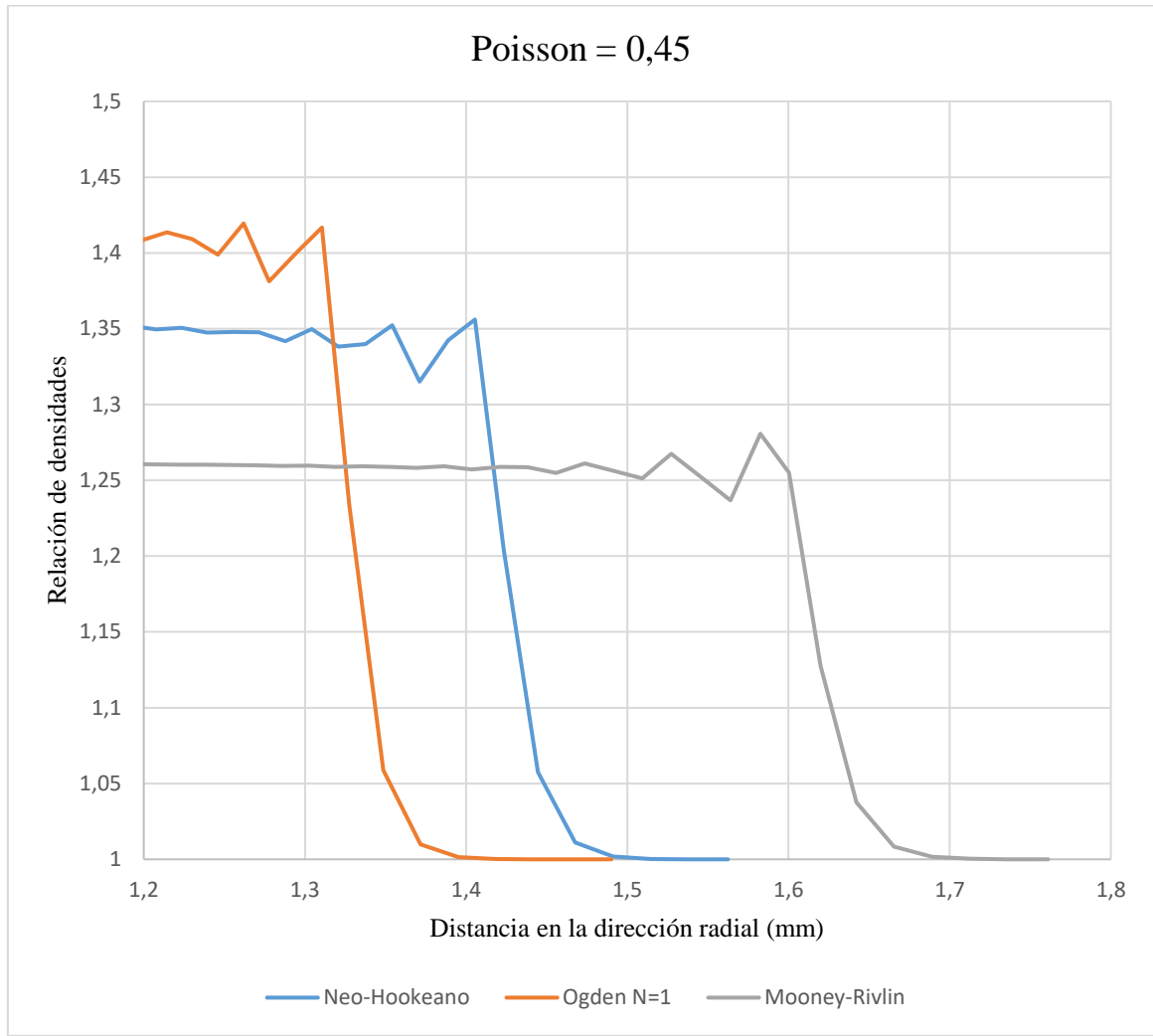


Figura 20. Curva Relación de densidades - Distancia en la dirección radial, para los 3 modelos hiperelásticos, considerando un coeficiente de Poisson de 0,45

No obstante, la evolución de la relación de densidades para distintos coeficientes de Poisson en cada modelo tiene que ser diferente, pues se considera distinta compresibilidad del material y la velocidad de la onda de choque es distinta en cada caso. Esto no se detecta en este estudio (ver Figura 21), lo que implica que se debe continuar trabajando en el modelo numérico para el caso compresible, considerando diferentes presiones y analizando la evolución tanto de la curva Velocidad de expansión – Tiempo como la de Relación de densidades – Distancia en la dirección radial, para diferentes instantes de tiempo.

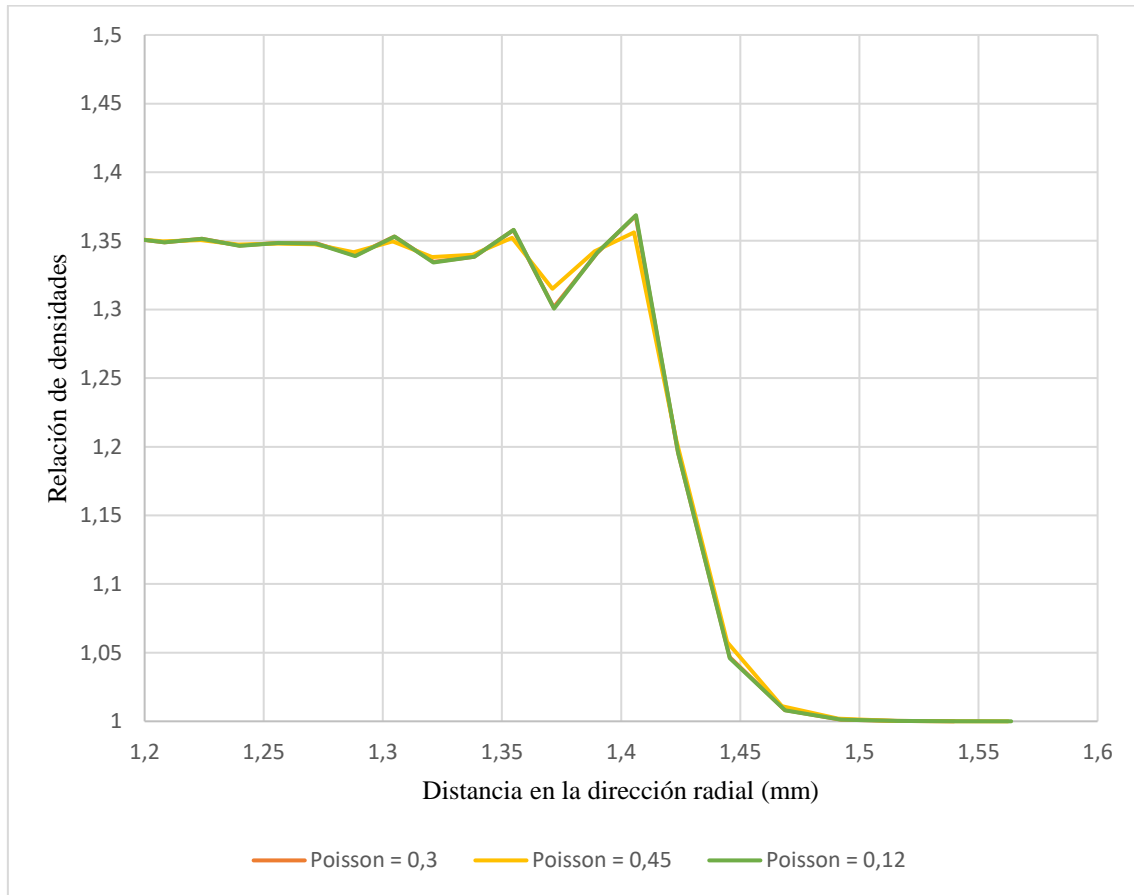


Figura 21. Curva Relación de densidades - Distancia en la dirección radial, para la forma Neo-Hookeano, considerando distintos coeficientes de Poisson

CAPÍTULO 6: MARCO REGULADOR Y ENTORNO SOCIO-ECONÓMICO DEL ESTUDIO

6.1 Normativa aplicable

El comité CTN 53 – Plásticos y Caucho (24), se encarga de normalizar tanto materia prima para la industria de los plásticos como elastómeros en cualquiera de sus formas, en sus aspectos de terminología, clasificación, designación, características y métodos de ensayos, quedando excluidos, entre otros elementos, los neumáticos.

Las normas UNE-ISO 37:2013 y UNE-ISO 7743:2016 están referidas a la determinación de las propiedades esfuerzo/deformación a tracción y compresión respectivamente, especificando los procedimientos a seguir para obtener estas propiedades del caucho, vulcanizado o termoplástico. No obstante, ninguna de estas normas es aplicable al estudio pues en él no se determinan las propiedades del material hiperelástico sino que se investiga un fenómeno que conduce al fallo del mismo.

Ello implica que, en la actualidad, no existe normativa o legislación alguna sobre el análisis del fenómeno de cavitación en elastómeros.

6.2 Propiedad intelectual

La propiedad intelectual es el conjunto de derechos que corresponde a los autores y a otros titulares de una invención, obra literaria o artística y símbolos, nombres e imágenes utilizados en el comercio (25).

Se considera autor a alguna persona natural que crea alguna obra literaria, artística o científica. Por ende, son objetos de propiedad intelectual las creaciones originales literarias, artísticas o científicas expresadas por cualquier medio, actualmente conocido (25).

Por tanto, la propiedad intelectual de este estudio pertenece a su autor, el cual tiene derechos morales que permiten exigir el respeto a la integridad del estudio y a la no alteración del mismo, y derechos relacionados con la explotación del trabajo.

Además, no es patentable pues se trata de una investigación sobre un fenómeno que ya se ha estudiado con anterioridad, obteniendo resultados similares.

6.3 Impacto socio-económico

El fenómeno de cavitación es un modo de fallo típico en materiales tipo caucho cuando son sometidos a altas velocidades de deformación. Por ende, su análisis resulta de vital importancia para prever la rotura del material.

En el caso de aplicaciones a nivel industrial, permite trabajar con un margen de seguridad que garantice la integridad de distintos elementos frente a este tipo de fallo. Por ejemplo, los muelles de elastómero de la suspensión de un tren, los cuales garantizan la unión entre los órganos de rodadura y el vehículo, aportando una fuerza recuperadora cuando se produce la separación entre ellos. Su principal función es soportar la caja de grasa (depósito utilizado para lubricar elementos de rodadura) del vehículo ferroviario. Esto implica que el coste de mantenimiento del tren sea menor pues la probabilidad de que se rompan los muelles es inferior al trabajar con mayor margen de seguridad.

Otro ejemplo de aplicación son los neumáticos de los automóviles. Aunque están formados por distintos materiales, la banda de rodadura o el calandraje interior están fabricados en caucho. Por ende, este estudio también permite asegurar el correcto funcionamiento de este tipo de elementos, previniendo el fallo del material por cavitación, lo que garantiza la seguridad de los conductores.

6.4 Presupuesto estimado

A nivel de costes aproximados del estudio, se han de considerar los siguientes apartados:

- ❖ Personal, referido al número de horas de trabajo por parte del autor.
- ❖ Equipamiento, referido al coste de la licencia del software de elementos finitos Abaqus así como otros equipos necesarios para realizar el estudio.

No obstante, no se consideran costes indirectos como la electricidad, los costes relacionados con la supervisión del estudio y la amortización del software.

En la Tabla 6 se muestra el coste final de cada sección.

Concepto		Coste horario (€/h)	Número de horas aproximadas	Coste final (€)
Gasto de personal		24	300	7.200
Equipamiento	Licencia Abaqus			33.650
	Otros			200

Tabla 6. Coste aproximado del estudio

Por tanto, el importe final asciende a 41.050 €.

CAPÍTULO 7: CONCLUSIONES

7.1 Influencia del modelo constitutivo en la cavitación

Para los casos donde la presión aplicada en la cavidad es menor que el valor crítico, es decir, 0,5 MPa y 1 MPa, la velocidad de expansión no se estabiliza sino que decrece hasta un valor nulo, lo que supone que el sólido alcanza una nueva configuración de equilibrio.

Aunque la evolución de la curva es similar en los 3 modelos, existen pequeñas diferencias. En la forma Mooney-Rivlin, los valores de la velocidad de expansión a lo largo del tiempo son menores que en el resto de modelos. Además, la etapa de decrecimiento de la curva es más brusca que en el Neo-Hookeano y Ogden $N=1$, lo que implica que en este modelo, la nueva configuración de equilibrio del sólido se alcanza en un tiempo menor.

Entre las otras dos formas no existen grandes diferencias, siendo la velocidad de expansión superior en el modelo Ogden $N=1$.

Por otro lado, cuando la carga aplicada es próxima al valor crítico donde se produce la cavitación (5,71 MPa), es decir, 5 MPa, la curva Velocidad de expansión – Tiempo se aproxima a un valor límite de forma asintótica, alcanzándose una cierta estabilidad.

Al igual que en los otros 2 casos, para 5 MPa de carga, la velocidad de expansión en el modelo Mooney-Rivlin es menor que en las otras dos formas, siendo esta superior en Ogden $N=1$. Esto supone que el modelo constitutivo hiperelástico sí influye en la cavitación del elastómero pues los valores de la velocidad donde se alcanza la estabilidad son diferentes. No obstante, la evolución de la curva es similar en los 3 modelos.

Por último, para los casos de carga de 8 MPa y 10 MPa, la curva Velocidad de expansión - Tiempo se estabiliza más rápidamente, pues estos valores de presión son superiores al crítico (5,71 MPa). En cuanto a las diferencias entre los modelos, ocurre lo mismo que en las otras sollicitaciones.

Cabe destacar que conforme se aumenta la carga aplicada en la cavidad, el tiempo en el que se estabiliza la velocidad es menor, lo que implica que la relación entre estas dos variables es inversamente proporcional.

Además, la curva Presión aplicada – Velocidad de cavitación para los 3 modelos es similar, siendo esta exponencial. Esto conlleva que, para una velocidad de cavitación muy elevada, la presión alcanza un valor próximo a infinito.

7.2 Efecto de la compresibilidad en el modelo constitutivo

La evolución de la curva Relación de densidades – Distancia en la dirección radial, para las formas Mooney-Rivlin, Neo-Hookeano y Ogden $N=1$ es notablemente diferente cuando se considera un material compresible.

En el instante donde se produce la cavitación, la relación de densidades decrece de forma brusca debido aparición de la onda de choque. Para la forma Ogden $N=1$, este descenso se produce en una distancia radial menor que en los otros dos casos. Además, la relación de densidades es superior respecto a la forma Neo-Hookeano y Mooney-Rivlin. Por otro lado, en el modelo Mooney-Rivlin, la cavitación se produce en una distancia radial superior en comparación con las otras dos formas, alcanzándose relaciones de densidad menores.

Todo ello implica que cada una de las formas predice un comportamiento del sólido distinto en el caso no isócoro, siendo el modelo Ogden $N=1$ el más restrictivo pues predice la cavitación en un instante de tiempo inferior. Además, se observa que cuanto mayor es la variación de densidad del sólido, menor es la distancia radial a la que se produce el fallo del material, lo que supone que la relación es inversamente proporcional.

No obstante, la evolución de la relación de densidades para distintos coeficientes de Poisson en cada modelo tiene que ser diferente, pues la velocidad de la onda de choque es distinta en cada caso. Esto no se observa en este estudio lo que implica que se debe continuar trabajando en el modelo numérico para el caso no isócoro.

CAPÍTULO 8: TRABAJOS FUTUROS

Como continuación a este trabajo, se puede mejorar el modelo numérico para el caso compresible, analizando la evolución de la densidad para un mayor rango de presiones y coeficientes de Poisson, en diferentes instantes de tiempo.

Otra alternativa es realizar el estudio considerando anisotropía en el material, aplicando diferentes condiciones de contorno y teniendo en cuenta los efectos térmicos, para analizar el comportamiento de los elastómeros en cualquier condición y así abarcar un campo de aplicación mayor.

También se podría modelizar un elemento con distinta geometría y comparar los resultados con los obtenidos en este trabajo. Esto permitiría conocer cuál es la influencia de la geometría en la cavitación del material.

Por último, se puede realizar el estudio utilizando otros modelos hiperelásticos disponibles en Abaqus / Explicit con el objetivo de compararlos y estudiar su influencia en el fallo del material. Esto permitiría conocer qué formas se adecúan mejor a lo que ocurre en los ensayos experimentales.

BIBLIOGRAFÍA

- (1) C.O. Horgan, D.A. Polignone, *Cavitation in nonlinearly elastic solids: A review*, Appl. Mech. Rev. 48. (1995). 471-485
- (2) C. Fond, *Cavitation criterion for rubber materials: a review of void-growth models*, J. Polym. Sci. Part B: Polym. Phys. 39. (2001). 2081-2096
- (3) O. López-Pamies, T. Nakamura, M.I. Idiart, *Cavitation in elastomeric solids: I onset of cavitation surfaces for neo-hookean materials*, J. Mech. Phys. Solids 59. (2011). 1488-1505
- (4) A. Faye, J.A. Rodríguez-Martínez, K.Y. Volokh, *Spherical void expansion in rubber-like materials: The stabilizing effects of viscosity and inertia*, J. Non-Linear. Mech. 92. (2017). 118-126
- (5) T. Cohen, R. Masri, D. Durban, *Shock waves in dynamic cavity expansion*. J. Appl. Mech 77. (2010). 041009
- (6) G. David, J.D. Humphrey, *Further evidence for dynamic stability of intracranial saccular aneurysms*. J. Biomechanics. 36 (8). (2003). 1143-1150
- (7) Y. B. Fu, G. A. Rogerson, Y. T. Zhang, *Initiation of aneurysms as a mechanical bifurcation phenomenon*. J. Non-Linear. Mech. 47 (2). (2012). 179-184
- (8) A. Bucchi, E. H. Hearn, *Predictions of aneurysm formation in distensible tubes*. J. Mech. Science. 70. (2013). 155-170
- (9) J. Z. Viñuela, J. A. Rodríguez-Martínez, *Cinemática del sólido deformable*. Mecánica de Sólidos. UC3M. (2017). 12-47
- (10) ABAQUS/Explicit, 2013. Abaqus Explicit v6.13 User's manual, versión 6.13 Edition. ABAQUS Inc., Richmond, USA
- (11) Universitat Politècnica de Valencia. *Curso de fundamentos de Ciencia de Materiales: 15. Materiales poliméricos y compuestos*. UPV
- (12) C.Lázaro, *Introducción a la Mecánica de Sólidos. Capítulo 4: Ecuaciones constitutivas*. UPV
- (13) B.C. Duncan. *Test methods for determining hyperelastic properties of flexible adhesives*. Nat. Phys. Lab. (1999)

- (14) L. E. Crocker, B.C. Duncan, J. Urquhart, A. Olsanya. *The application of rubber material models to analyse flexible adhesive joints*. (1999)
- (15) P. Uthuppan. *Hyperelastic Material Testing*. COSMOS DesignStar User. Group Meeting. (2003)
- (16) J.A. Rodríguez-Martínez, T. Cohen, R. Zaera, *Approaching steady cavitation: The time scale in hypervelocity cavity expansion in work hardening and transformation hardening solids*. Int. J. Impact Eng. 73. (2014). 45-55
- (17) A.N Gent, C.Wang, *Fracture mechanics and cavitation in rubber-like solids*. J. Material Science. 26 (12). (1991). 3392-3395.
- (18) T. Cohen, A. Molinari, *Dynamic cavitation and relaxation in incompressible nonlinear viscoelastic solids*. Int. J. Solids. Struc. 69-70. (2015). 544-552
- (19) L. F. Henderson, *Handbook of Shock Waves*, Volume 1. Chapter 2: General Laws for Propagation of Shock Waves through Matter. (2001)
- (20) E. Elmukashfi, M. Kroon, *Numerical analysis of dynamic crack propagation in rubber biaxially strained rubber sheets*. Eng. Fract. Mech. 124-125. (2014). 1-17
- (21) Z. Rosenberg, E. Dekel, *A numerical study of the cavity expansion process and its application to long-rod penetration mechanics*. Int. J. Impact. Eng. (2008). 35:147-54
- (22) R. Pérez Saéz, *Propiedades elásticas de los materiales*. Departamento de Física de la Materia Condensada. Universidad del País Vasco.
- (23) C. Hellier, *Handbook of Nondestructive Evaluation*. McGraw-Hill. (2003). 7.4-7.10
- (24) CTN 53 – Plásticos y Cauchos. Asociación Española de Normalización y Certificación AENOR.
- (25) La Propiedad Intelectual: Definición, Sujetos y Derechos. Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.